Filozofski fakultet u Rijeci
Odsjek za filozofiju

Seminar iz Filozofije matematike

Gödelov teorem nepotpunosti

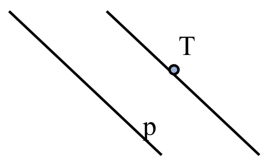
Ime i prezime stud.: Maja Vukas
Smjer: Filozofija i informatika
Ak. god.: 2005./2006.

Uvod

Gödelov teorem je označio novo, drukčije gledanje na matematiku, no da bi vidjeli u čemu je novost, moramo znati što je bilo prije. Zato ću na početku proći kratki povijesni pregled gledanja na matematiku.

Stari Grci

Elementarna geometrija je deduktivna disciplina (neki se teorem može utvrditi kao zaključak eksplicitnog logičkog dokaza). “Aksiomatska metoda” je metoda u kojoj aksiomi čine temelj, a teoremi nadgradnja preko logičkih pravila. U tu metodu su neupitno vjerovali matematičari, tijekom oko 2000 godina! Jedan od poznatijih aksioma je aksiom o paralelama.



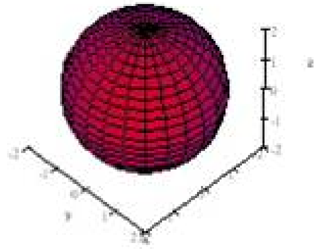
Taj se aksiom nalazi u Euklidovim Elementima, knjizi koja je aksiomatizirala cijelu matematiku koja je bila poznata u to vrijeme. Aksiom o paralelama logički je ekvivalentan s pretpostavkom da se kroz jednu točku izvan danog pravca može povući samo jedan paralelni pravac. Tek je u devetnaestom stoljeću zaslugom Gaussa, Bolyaia, Lobachevskia i Riemanna dokazana nemogućnost izvođenja tog aksioma iz drugih aksioma. To je uputilo na činjenicu da se može dati dokaz o nemogućnosti dokazivanja određenih propozicija unutar danog sustava te je zato taj dokaz vrlo važan za daljnji razvoj matematike i općenito pogleda na matematiku. Zaključilo se da Euklid ne predstavlja posljednju riječ u geometriji. Također se zaključilo da upotrebom određenog broja aksioma koji su različiti i inkompatibilni s onima što ih je prihvatio Euklid, mogu se konstruirati novi sustavi geometrija. Važno pitanje koje je bilo postavljano je: da li su ti drugi sustavi istiniti i unutarnje konzistentni[1] jer očito nisu o “našem” prostoru.

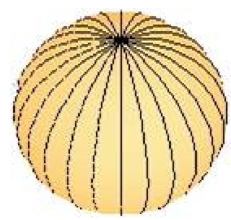
Neeuklidske geometrije

Opća metoda za rješavanje problema unutarnje konzistentni je da se za apstraktne postulate sustava se pronađe "model" (ili "interpretacija"), tako da se svaki postulat prevede u

[1] to znači da je iz aksioma nemoguće izvesti dvije formalno proturječne formule
npr. 0=0 i 0≠0 (to je zapravo iskaz metamatematike, ali o tome kasnije...)

istiniti iskaz o modelu. Jedna od neeuklidskih geometrija je Rimanovska geometrija. U tom sustavu vrijedi da se kroz jednu točku izvan zadanog pravca može povući 0 paralela. To možda čudno zvuči, ali može se provjeriti da li može vrijediti, gore navedenim postupkom. Model za ovu geometriju je takav da ono što se u Euklidskoj geometriji naziva 'ravnina' ovdje je to euklidska kugla, a ono što je u Euklidskoj geometriji 'ravna crta' ovdje je luk velike kružnice.





Tako dobijemo da je se dva ili više ravnih crta siječe u polovima te da ne možemo povući pravce koji se neće sječi niti u jednoj točki (a da su istog polumjera).

Pitanje je da li je pomoću modela problem konzistentnosti riješen. Ovakav dokaz konzistentnosti rimanovske geometrije izgleda uvjerljivo, ali problem je u tome što se pozivamo na euklidsku geometriju (jer smo pustili iste postulate, samo smo termine drukčije definirali). Tako zapravo imamo slučaj da je rimanovska geometrija konzistentna ako je konzistentna euklidska geometrija. Dakle, moramo se dalje pitati: jesu li aksiomi Euklidova sustava konzistentni? Tijekom vremena nuđeni su različiti odgovori na to važno pitanje. Jedan odgovor je da su ti aksiomi istiniti su, pa da su samim tim i konzistentni, no to se više ne prihvaća. Sljedeći odgovor je da su suglasni sa našim iskustvom prostora pa ekstrapolacijom ka univerzalnom zaključujemo da je I opravdana. Problem u tom odgovoru je pozivanje na indukciju koja je logički nepotpuna, pa niti aksiomi ne bi mogli biti potpuni. David Hilbert je išao drukčijim putem, on je Euklidove aksiome transformirao u algebarske istine. Slijedi nešto više o tome.

Hilbert

One je radio prijevod pojmova koji su korišteni u Elementima na sljedeći način: 'točku' je definirao kao par brojeva (koordinate u koordinatnom sustavu, npr.: T(1,0)), 'ravnu crtu' je definirao kao odnos između brojeva izražen preko jednadžbe prvog reda (y=ax+b), 'krug' kao kvadratnu jednadžba određenog oblika i sve ostalo analogno tome. U takvom prijevodu, konzistentnost je zadovoljena tako što se pokazalo da su aksiomi zadovoljeni algebarskim modelom ali, imamo opet seljenje problema u drugu domenu, u domenu modela. Objasnimo malo što su to modeli i kako se koriste.

Modeli

Oni služe za rješavanje problema konzistentnosti. Postoje dvije vrste modela i to su konačni i beskonačni. Konačni modeli su oni koji služe za opis sustava s konačnim brojem elemenata i takvi su modeli konzistentni. No, pošto skup cijelih brojeva sadržava ∞ elemenata (jer svaki cijeli broj ima neposrednog sljedbenika) moramo koristiti beskonačne modele, koji mogu imati skrivena proturječja, a to nikako ne možemo dopustiti kod dokazivanja konzistentnosti. Neka poznata proturječja su: G. Cantorova “antinomija” kod beskonačnih skupova i B. Russellovo proturječje. Kantor je dokazao da postoji proturječje u beskonačnim skupovima unatoč intuitivne jasnoće pojmova sadržanih u pretpostavkama i prividno konzistentnom karakteru izvršenih intelektualnih konstrukcija. Russellovo proturječje je o elementarnoj logici. On definira klase koje sadrže sebe i klase koje ne sadrže sebe koje naziva “normalne”. Primjer normalne klase je klasa studenata jer klasa studenata nije i sama student. Sljedeće što definira je N, skup normalnih klasa. Za N vrijedi da je N normalna akko N nije normalna.

Za modele možemo zaključiti da beskonačni modeli ne daju konačan odgovor na pitanje o konzistentnosti sustava s ∞ elemenata te ih za tu potrebu ne možemo koristiti.

Apsolutni dokazi konzistentnosti

Hilbert sljedeće predlaže upotrebu “apsolutnih” dokaza, u kojima se ne bi trebalo pozivati na konzistentnost drugih sustava. Sustav treba u potpunosti formalizirati da bi se riješili svakog značenja (da bi dobili prazne znakove), te moramo imati skup točno utvrđenih pravila za kombiniranje tih znakova. Postulati i teoremi potpuno formaliziranog sustava jesu "lanci" (ili konačno dugi nizovi) znakova bez značenja, konstruirani prema pravilima za kombiniranje elementarnih znakova sustava u veće cjeline. Izvođenje teorema iz postulata je transformacija (prema pravilima) jednoga skupa takvih "lanaca" u drugi skup. Takvim je postupkom uklonjena opasnost da se upotrijebi bilo koje prešućeno načelo zaključivanja.

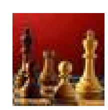
Metamatematika

Metamatematički iskazi su iskazi o znakovima koji se pojavljuju unutar formaliziranog matematičkog sustava (tj. računa) – o vrstama i uređenjima takvih znakova kada se kombiniraju za oblikovanje dužih lanaca koje nazivamo "formulama" ili o odnosima među formulama koje možemo dobiti kao posljedicu pravila postupanja koja su za njih specificirana.

matematika	metamatematika
sustav znakova bez značenja	značenjski iskazi o matematici
2+3=5	‘2+3=5’ je aritmetička formula
x	‘x’ je varijabla
0≠0	‘0≠0’ nije teorem
	formula ‘0=0’može se izvesti iz formule ‘x=x’ supstituiranjem brojke ‘0’ na mjesto varijable ‘x’
	aritmetika je konzistentna

Hilbertov program

On je svoj pokušaj da izgradi “apsolutne” dokaze konzistentnosti temeljio na razlici formalnog računa i njegovog opisa. Hilbertov program se sastoji u tome da dokazi konzistentnosti moraju uključiti samo takve postupke koji ne upućuju niti na ∞ broj strukturalnih svojstava formula niti na ∞ broj operacija s formulama. Može se povući analogija sa šahom, jer su nam figure znakovi bez značenja koji se mogu "micati" prema točno uređenom skupu pravila.



Redukcija aritmetike na logiku

Tradicionalna (Aristotelova) logika je nepotpuna jer ne može prevesti neke jednostavne iskaze prirodnog jezika na jezik logike. Sredinom 19. stoljeća je G. Boole, engleski matematičar izumio simboličku logiku te je jedna struja matematičara nastojala čistu matematiku izložiti kao odsječak formalne logike. To su pokušali Whitehead i Russell u knjizi Principia Mathematica. U 20. st. pokušalo se “aritmetizirati” algebru i “infinitezimalni račun”, različiti pojmovi upotrijebljeni u matematičkoj analizi mogu se definirati isključivo na aritmetički način (tj. pomoću cijelih brojeva i aritmetičkih operacija nad njima). Russell i

Frege su nastojali pokazati da se svi matematički pojmovi mogu definirati čisto logičkim kategorijama i da se svi aksiomi aritmetike mogu izvesti iz malog broja osnovnih propozicija koje se mogu potvrditi kao čisto logičke istine.

Fregeova i Russellova redukcija aritmetike na logiku, ipak, ne osigurava konačan odgovor na problem konzistentnosti. Problem se samo pojavljuje u općenitijem obliku: da li je logika konzistentna.

Principia je imala neprocjenjivu vrijednost za daljnje istraživanje pitanja konzistentnosti zbog toga što je koristila izvanredno obuhvatni notacijski sustav te zbog toga što je većinu pravila formalnog izvođenja su učinila eksplicitnima (do tada su matematičari često koristili neku svoju intuiciju, koja je u nekim slučajevima bila ispravna, a u nekima i nije).

U nastavku rada slijedi kratka ilustracija formalizacije (iz jednog odlomka iz Principije) i prikaz mogućnosti utvrđivanje njegove apsolutne konzistentnosti deduktivnog sustava.[2]

Koraci formalizacije

1. potpun popis znakova
2. postavljanje “formacijskih pravila” (za ispravne formule i rečenice)
3. postavljanje “transformacijskih pravila” (pravila zaključivanja)
4. određivanje nekih formula kao aksioma (služe kao temelj sustava)

Primjer formalizacije logike propozicija:

1. p, q, r
2. ~ (ne), v (ili), → (ako...onda), *(i)
3. pravilo supstitucije, pravilo otkidanja (modus ponens)
4. (p v p) → p

   p → (p v q)

   (p v q) → (q v p)

---

[2] Korisni termini: "teorem sustava" je bilo koja formula koja se može izvesti iz aksioma uzastopnim primjenjivanjem transformacijskih pravila. Formalni "dokaz" ("demonstracija") je konačan niz formula od kojih je svaka ili aksiom ili se pomoću transformacijskih pravila može izvesti iz prethodnih formula u nizu.

$(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$

Postupak apsolutnog dokaza konzistentnosti[3] se sastoji u pronalaženju neke karakteristike ili strukturalne osobitosti formula koja zadovoljava sljedeća tri uvjeta:

1. Svojstvo mora biti zajedničko za sva četiri aksioma.
2. Svojstvo mora biti "nasljedno" pod transformacijskim pravilima – to jest, ako svi aksiomi imaju to svojstvo, onda ga mora imati bilo koja formula koja je transformacijskim pravilima ispravno iz njih izvedena.
3. Svojstvo ne smije pripadati svakoj formuli koja se može konstruirati u suglasnosti s formacijskim pravilima sustava; to jest, moramo nastojati izložiti barem jednu formulu koja nema to svojstvo.

Evo jednog primjera dokaza prema prethodno navedenim uvjetima. Uzmimo svojstvo biti tautologija (istina u svim mogućim svjetovima).

1. Tautologija je istinita bez obzira da li su sastavni dijelovi istiniti ili lažni.
2. Nasljedna je po transformacijskim pravilima (nećemo to dokazivati).
3. Formula p v q pripada sustavu, ali nije tautologija

Ograničenja Hilbertove finitističke metode je to što nije dovoljno moćna da dokaže konzistentnost takva sustava kao što su Principia, čiji je rječnik i logički aparat dostatan da izrazi čitavu aritmetiku, a ne samo jedan fragment. Matematika obiluje općim iskazima za koje nisu pronađene iznimke, a koji su dosada odolijevali svim pokušajima da ih se dokaže. Klasičan je primjer poznat kao "Goldbachov teorem" koji tvrdi da je svaki parni broj zbroj dvaju primbrojeva.

“Richardov paradoks” je paradoks čiji je postupak dokaza bio uzor Gödelu za njegov dokaz nepotpunosti. Gödelov teorem slijedi strukturu Richardova paradoksa, ali izbjegava njegov problem. Richardov paradoks glasi ovako: svaka definicija sastoji se od slova. Poredamo definicije prema broju slova. Jedan cijeli broj odgovarati svakoj definiciji i predstavljat će broj mjesta koja ta definicija zauzima u nizu. Nekad će cijeli broj posjedovati

[3] Želimo pokazati da je skup aksioma neproturječan tj. da se iz tih aksioma ne može izvesti i S i ~S. Ako nije svaka formula teorem, onda je račun konzistentan (jer se iz proturječnog skupa aksioma može izvesti bilo koja formula).

upravo ono svojstvo koje je označeno definicijom s kojim je taj cijeli broj u korelaciji, npr. kada bi redni broj 17 bio dodijeljen definiciji 'nedjeljiv ni s jednim cijelim brojem osim s 1 i samim sobom'. Ako 'x nema svojstvo označeno definicijskim izrazom s kojim je x u korelaciji u skupu definicija poredanih u niz' onda je taj broj rišarovski, npr. kada bi redni broj 15 bio dodijeljen definiciji 'biti umnožak nekog cijelog broja sa samim sobom'. Definiciji rišarovskog ('x nema svojstvo označeno definicijskim izrazom s kojim je x u korelaciji u skupu definicija poredanih u niz') pridružimo redni broj n. Iz tog slijedi da je n rišarovski akko n nije rišarovski.

Richardov paradoks važan je za Gödela jer njegove probleme (tj. sam paradoks) možemo izbjeći pažljivim razlikovanjem iskaza unutar aritmetike (koji ne upućuju ni na kakav notacijski sustav) i iskaza o nekom notacijskom sustavu u kojem je aritmetika kodificirana.

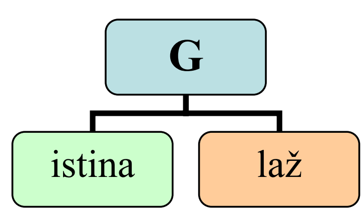
Pojednostavljena verzija Gödelovog teorema

Rucker, Infinity and the Mind daje jednu pojednostavljenu verziju Gödelovog teorema, tj. njegovu osnovnu proceduru.

Zamislimo da imamo vremenski stroj i da se možemo vratiti u vrijeme kada je Gödel bio živ, tada bi ga mogli upoznati s UTM-om tj. strojem koji je u stanju generirati sve istine i samo istine.

Universal Truth Machine
pretpostavlja se da je sposoban točno
odgovoriti na bilo koje pitanje

Gödel bi tada mogao zatražiti program P(UTM) po kojem radi UTM, kako bi možda nadmudrio UTM, tj. smislio rečenicu koju UTM neće moći izreći. Pretpostavimo da je to učinio, malo razmišljao i izrekao rečenicu: "stroj konstruiran na bazi programa P(UTM) nikada neće reći da je ova rečenica (G) istinita." Nazovimo tu rečenicu G. Moguća rješenja za



UTM su da je rečenica G istina ili da je laž.

Ako UTM kaže da je G istina, onda je G de facto laž, a UTM može davati samo istinite tvrdnje! Dakle, UTM nikada neće reći da je G istina. Time smo pokazali da UTM nikad neće reći da je G rečenica istina tj. da je G de facto istina!

Gödel zaključuje: "Ja znam istinu koju UTM nikada ne može izreći". Iz toga slijedi da UTM nije potpun sustav.

Važno je napomenuti da G uopće nije neka maglovita, nejasna, ne-matematička rečenica. Ona je specifičan matematički problem kojem mi znamo rješenje, bez obzira na to što ga UTM ne zna.

Sljedeće ću izložit način na koji Gödel dolazi do zaključka kojeg smo upravo vidjeli.

Gödelovo pridruživanje brojeva

“Gödelov broj” znaka, formule ili dokaza

osnovni vokabular:

- konstantni znakovi

$\sim$	$\vee$	$\supset$	$\exists$	$=$	0	s	$($	$)$	$,$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- varijable

- brojevne:	'x', 'y', 'z'...	(BV)	- određeni primbroj veći od 10	$11, 13, 17\ldots$
- rečenične:	'p', 'q', 'r'...	(RV)	- kvadrat primbroja većeg od 10	$11^2, 13^2, 17^2\ldots$
- predikatske:	'P', 'Q', 'R'...	(PV)	- kub primbroja većeg od 10	$11^3, 13^3, 17^3\ldots$

Evo jednog primjera postupka pridruživanja Gödelovog broja nekoj formuli.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(& \exists & x &) & (& x & = & s & y &) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
8 & 4 & 11 & 9 & 8 & 11 & 5 & 7 & 13 & 9
\end{array}
$$

Dakle, svakom znaku pridružuje se određeni broj, kako je određeno ranije. Da bi se formuli pridružio jedinstven broj, poredamo primbrojeve i svakog potenciramo s brojem dobivenim u formuli te dobijemo broj m, koji je Gödelov broj zadane formule.

$$m = 2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9$$

Isto napravimo i s drugom formulom, $(\exists x)(x = s0)$ te za nju dobijemo na isti način broj n (koji nećemo sada izračunavati, ali postupak je isti). Te su dvije formule dio nekog dokaza, ali uzmimo da je cijeli dokaz kako bi pokazali postupak pridruživanja jedinstvenog G. broja cijelom dokazu. Svakom retku dokaza pridružujemo primbroj i potenciramo ga Gödelovim brojem formule tog retka te dobijemo broj: $2^m \times 3^n$

$$
\begin{array}{llll}
 & \vdots & & \\
\text{"premisa"} & \underline{(\exists x)(x = sy)} & -m & \text{dokaz} \\
\text{konkluzija} & (\exists x)(x = s0) & -n & 2^m \times 3^n
\end{array}
$$

Ovaj postupak aritmetizacije može se (naravno) vršiti i u suprotnom smjeru. Dakle, ako imamo zadan neki broj, lako možemo odrediti da li je to Gödelov broj i ako je, koji izraz reprezentira. Uzmimo broj 243000000, za njega postupak izgleda ovako:

$$243000000$$

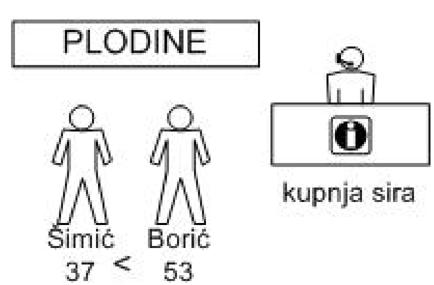
$$64 \times 243 \times 15625$$

$$2^6 \times 3^5 \times 5^6$$

$$0 = 0$$

Aritmetizacija metamatematike

Metamatematička pitanja možemo proučavati istraživanjem aritmetičkih svojstava i odnosa određenih cijelih brojeva (Gödelovih brojeva izraza koje koristimo). Kako bi bila jasnija ta koncepcija, možemo se poslužiti analogijom kupovine u dućanu. Kada bi gospodin Borić želio kupiti sir prije gospodina Šimića, ne bi mu morali objašnjavati



da je došao poslije njega te da zbog toga ne može doći prije na red, mogli bi mu reći da je broj 37 manji od 53 i uputiti indirektno na istu činjenicu.

Svi metamatematički iskazi o strukturalnim svojstvima izraza u računu mogu se prikladno preslikati unutar samog sustava.

Pogledajmo

primjer:

	$(p \vee p) \supset p$
$a =$	$2^8 \times 3^{11} \times 5^2 \times 7^{11^2} \times 11^9 \times 13^3 \times 17^{11^2}$
	$(p \vee p)$
$b =$	$2^8 \times 3^{11} \times 5^2 \times 7^{11^2} \times 11^9$

manja formula (b) može biti dio veće formule (a) akko je b faktor od a

Niz formula s Gödelovim brojem x jest dokaz (ili demonstracija) formule s Gödelovim brojem z akko stoje u aritmetičkom odnosu ovdje označenim s $Dem(x,z)$[4] Prije smo imali dokaz koji je imao G. broj k=2m x 3n, a konkluzija je imala G. broj n te su oni bili u odnosu Dem(k,n).

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
\text{"premisa"} \quad & (\exists x)(x = sy) \quad -m & \text{dokaz} \\
\text{konkluzija} \quad & (\exists x)(x = s0) \quad -n & k = 2^m \times 3^n
\end{aligned}
$$

metamatematički iskaz	aritmetički iskaz
neki niz formula x je dokaz za danu formulu z	Dem(x,z)
neki niz formula x nije dokaz za danu formulu z	~ Dem(x,z)
iskazi o izrazima i njihovim međusobnim odnosima	izračunavamo da li vrijedi aritmetički odnos između brojeva – nagađanje i intuicija ne igraju nikakvu ulogu

[4] ovo je formula – može biti i/n

$$(\exists x)(x = sy) \; = m \qquad y \; = 13 \;\longrightarrow\; Sub(m, 13, m) \;\longrightarrow\; (\exists x)(x = sm)$$

Ovo je metamatematička karakterizacija koja jednoznačno određuje broj, koji je neka aritmetička funkcija brojeva m i 13. Možemo tom izrazu izračunati Gödelov broj, a to je G. broj za formulu koja je dobivena iz formule s G. brojem m supstituiranjem za varijablu s G. brojem 13 numerala za m.

Srž Gödelova argumenta

Gödel je pokazao kako treba konstruirati aritmetičku formulu G koja predstavlja matematički iskaz 'Formula G ne može se demonstrirati'. Do nekog stupnja se G konstruira analogno Richardovu paradoksu.

Formula $'\sim Dem(x,z)'$ predstavlja iskaz 'Niz formula s G. brojem x nije dokaz za formulu s G. brojem z'. Uvodimo prefiks '(x)' što znači 'Za svaki x' i dobivamo formulu: $'(x) \sim Dem(x,z)'$. Ta je formula predstavnik, unutar aritmetičkog računa, metamatematičkog iskaza 'Formula s G. brojem z ne može se demonstrirati'.

Gödel je dokazao da se jedan poseban slučaj te formule ne može formalno demonstrirati, sada ćemo vidjeti koji.

(1) $(x) \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$

$\downarrow$

označava Godelov broj formule koja
je dobivena iz formule s G.b. y
supstituiranjem za varijablu s G.b.13, numerala za y

Formula retka (1) predstavlja metamatematički iskaz 'Formula s Gödelovim brojem sub(y,13,y) ne može se dokazati'. Uzmimo da je Gödelov broj te formule n. Formuli iz retka (1) za varijablu s Gödelovim brojem 13 (tj. za varijablu 'y') supstituiramo numeral za n, i dobijemo: $\sim (x) \sim Dem(x, sub(n, 13, n))$. Formula G ima Gödelov broj i to je $Sub(n, 13, n)$ što znači da u formuli s G.b.[5] n, varijablu s G.b. 13 zamijenimo za numeral n.

[5] Gödelovim brojem

Sjetimo se da je formula G zrcalna je slika unutar aritmetičkog računa metamatematičkog iskaza 'Formula s Gödelovim brojem sub(n,13,n) ne može se demonstrirati'. Slijedi da formula $'(x) \sim Dem(x, sub(n,13,n))'$ predstavlja u računu metamatematički iskaz 'Formula $'(x) \sim Dem(x, sub(n,13,n))'$ ne može se demonstrirati'

Zaključujemo da se G ne može formalno demonstrirati, što slijedi iz sljedećeg argumenta. Ako bi se formula G se mogla demonstrirati, onda bi se mogla demonstrirati njezina negacija; i obrnuto (ako bi se moglo demonstrirati ~G, onda bi se moglo i G)[6]. Pretpostavimo da se formula G može demonstrirati. Onda mora postojati niz formula unutar aritmetike koji predstavlja dokaz za G. Neka je G.b. tog dokaza k. Mora vrijediti $Dem(k, sub(n,13,n))$. To mora biti istinita formula i mora se moći formalno demonstrirati. Uz pomoć transformacijskih pravila u elementarnoj logici, možemo iz toga neposredno izvest 2. formulu:

$$\begin{array}{c} Dem(k, sub(n,13,n)) \\ \Downarrow \\ \sim (x) \sim Dem(x, sub(n,13,n)) \end{array}$$

Ako se formalno može demonstrirati i neka formula i njena negacija (G i ~G), onda aritmetički račun nije konzistentan.

$$\begin{array}{lll} (G \wedge \sim G) & \rightarrow & \sim Konzist(aritmetika) \\ Konzist(aritmetika) & \rightarrow & \sim (G \wedge \sim G) \end{array}$$

Ako je aritmetički račun konzistentan, onda se iz aksioma aritmetike ne mogu izvesti ni G ni ~G. Tada je G formalno neodlučiva formula.

Mogli bi se pitati zašto je tako važno da se unutar aritmetike može konstruirati formula koja je neodlučiva. To je tako važno zato što se metamatematičkim zaključivanjem može pokazati da je G istinita. Zaključivanje koje pokazuje istinitost neodlučive formule G je jednostavan.

Pod pretpostavkom da je aritmetika konzistentna, za metamatematički je iskaz 'Formula $'(x) \sim Dem(x, sub(n,13,n))'$ nije dokaziva'. Taj je stavak unutar aritmetike predstavljen samom formulom koja se u njemu spominje. Metamatematički iskazi su u aritmetički formalizam preslikani tako da istiniti metamatematički iskazi odgovaraju istinitim aritmetičkim formulama. Slijedi da formula G mora biti istinita.

---

[6] tj. *~(x)~Dem(x,sub(n,13,n))*

Iz aksioma se ne mogu izvesti sve aritmetičke istine:

G je istinita formula

G je formalno neodlučiva

Dakle, aksiomi aritmetike su nepotpuni

To nam omogućuje da dođemo do zaključka da je aritmetika u biti nepotpuna. To znači da kada bi uvećali početni skup aksioma, mogli bi izvesti neku formulu koja bi imala svojstva kao G.

Formula 'ako je aritmetika konzistentna, onda je ona nepotpuna' može se demonstrirati. Dio te formule: aritmetika je konzistentna, ekvivalentno je iskazu 'postoji barem jedna formula aritmetike koja se ne može demonstrirati'. Nazovimo tu formulu A. Drugi dio: aritmetika je nepotpuna, ekvivalentno je iskazu 'postoji istiniti aritmetički iskaz koji se u aritmetici ne može formalno demonstrirati'. Nazovimo tu formulu G. Tada se početna formula može zapisati u obliku '$A \supset G$'.

Formula A se ne može demonstrirati. Dokaz: pretpostavimo da se A može dokazati. Tada, budući da se '$A \supset G$' može demonstrirati, upotrebom pravila MPP mogla bi se dokazati formula G, ali za nju znamo da je formalno neodlučiva. Stoga, ako je aritmetika konzistentna A se ne može demonstrirati. To znači da, ako je aritmetika konzistentna, onda se njena konzistentnost ne može dokazati nikakvim metamatematičkim zaključivanjem koje se može predstaviti unutar formalizma aritmetike!

Dakle, ovaj dokaz isključuje dokaz konzistentnosti koji može biti zrcaljen formalnim dedukcijama aritmetike.

Gödelovi glavni zaključci

Nije vjerojatno da se može dati finitistički dokaz konzistentnosti aritmetike.

Pod pretpostavkom bilo kojega konzistentnog skupa aritmetičkih aksioma, postoje istiniti aritmetički iskazi koji se iz skupa ne mogu izvesti.