

Filozofski fakultet u Rijeci
Odsjek za filozofiju

Seminar iz Filozofije matematike

**Platonova filozofija i Aristotelova logika u Euklidovim
Elementima**

Ime i prezime stud.: Tanja Grubišić

Smjer: Njemački jezik/Filozofija

Ak. god.: 2006./2007.

1. Sažetak

Pokušati ću kroz nekoliko faza svoga rada prikazati neobično važne utjecaje dvaju filozofa, Platona i Aristotela na Euklida u procesu stvaranja temelja geometrije. U uvodu ću ukratko pokušati prikazati povijesnu pozadinu događaja i vremenski slijed događaja. U dijelu koji slijedi nakon uvoda ću pokušati ukratko prikazati Euklidove Elemente i područja na koja su Platon i Aristotel direktno utjecali, dok ću u glavnom odlomku sve pokušati razjasniti, i iz pokoji primjer predočiti. Na samome kraju u zaključku, ću se osvrnuti na svoj rad i pokušati ga ukratko sažeti.

2. Uvod

Euklid je bio Platonov student u Ateni, dok je većinu života proveo radeći u Aleksandriji, Egiptu, gdje je osnovao matematičku akademiju. Njegovo čuveno djelo su "Elementi", koje je izvršilo ogroman utjecaj na zapadno akademsko mišljenje. Za "Elemente" se kaže da je poslije Biblije u ljudskoj povijesti najviše proučavano, prevađano i tiskano djelo. Doživjelo je 1700 izdanja. Euklid je sistematski opisivao ono što je izučavao, postavljao je više aksioma i teoreme izvodio iz stečenih zaključaka. Tako logična metoda istraživačkog rada održala se do dana današnjeg. Elementi su pisani u trinaest tomova, a u njima je Euklid iznio i nalaze svojih prethodnika, Pitagore i drugih, u vidu sistematskih dokaza, teorija i originalnih nalaza. U prvih šest tomova detaljno je obradio geometriju ravni: trokute, kvadrate, pravokutnike, krugove, kao i teoriju proporcija. Slijedeća četiri toma obuhvaćaju razne teorije, uključujući i teoriju o neograničenim brojevima.

Na Euklida i njegov rad, najveći utjecaj su imala dva značajna filozofa, Platon i Aristotel. Euklidovi Elementi imaju i danas kao što su imali i nekada veliki utjecaj na matematiku, te se smatraju temeljima matematike kakvu ju danas poznajmo. Euklidovi Elementi u sebi samima sadrže mnoge kontradikcije, koje su otkrivene tek nakon velikog vremenskog perioda i nakon većih saznanja na polju znanosti, kojima

Euklid u svoje vrijeme nije raspolagao. Kako je bio pod utjecajem Platona i njegove filozofije, Euklidovi 'elementi' najvećim djelom nalikuju na platonističke figure.¹

2.1. Kratki pregled Euklidovih elemenata

Elementi su sazdana na podiju aksioma, postulata i definicija koji nisu i nikad ne mogu biti dokazani. U Elementima je Euklid pristupio izgradnji geometrije u duhu Platonove i Aristotelove koncepcije deduktivne znanosti. Treba iz tog razloga prvo odabrati temeljne pojmove, što su u ovom slučaju njegove definicije, a onda ići na daljnje razrađivanje tih istih, kod Euklida su to postulati i aksiomi. Euklid koristi Aristotelovu klasifikaciju, te dijeli aksiome na posebne i zajedničke (opće), gdje posebne aksiome naziva aitemata, odnosno današnji pojam postulat, koji se još tada na latinskome tako upotrebljavao.²

Euklidovi aksiomi :

1. Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.
2. Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.
3. Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostaci su jednaki.
4. Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake
5. Cjelina je veća od dijela.

Euklidovi postulati:

1. Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.
2. I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini.
3. I da se svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.
4. I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.

¹ <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/Euclid.html>, str. 1

² Kruzak d.o.o. (Grgić-Hudoletnjak, Maja) (1999.) "Euklid Elementi I- VI" Zagreb, str. 235

5. I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj se kutovi manji od dva prava kuta.³

Zato što su posebni aksiomi dobili ime postulat, mogli su zato opći aksiomi biti nazvani jednostavno «aksiomi» bez pridjeva «opći».⁴ Prva tri postulata se pripisuju Euklidovim prethodnicima, zbog nepovezanosti sviju pet. Euklid razmišlja o pravcu na način na koji se razmišlja i danas i njemu je činjenica, da je pravac određen dvjema točkama, apriorno evidentna. Četvrti postulat se može dokazati pomoću preostalih aksioma i postulata, te zbog toga u biti niti ne spada pod postulate. Uz aksiome i postulate daje i popis 23 definicija, koje se do danas nisu uspjele dokazati, no u matematici su prihvaćene i do danas nisu dane bolje definicije.

Primjer nekolicine definicija iz prve knjige Euklidovih Elemenata:⁵

Definicija 1. Točka je ono što nema dijelova.

Definicija 2. Pravac je ono što nema širine.

Definicija 3. Krajevi pravca su točke.

Definicija 4. Površina je ono što ima samo dužinu i širinu.

Definicija 5. Ravna linija (pravac) je ona na kojoj sve njezine točke podjednako leže.⁶ (Definicije preuzete iz Euklid Elementi, str. 1-2)

3. Platonova filozofija i Aristotelova logika u Euklidovim elementima

3.1. Platonov utjecaj na Euklida

Platon smatra da u svijetu pojava postoje samo prividne istine, a stvarnih istina ima samo u svijetu ideja. Ideja se na rađa i ne umire, ne reflektira u sebi ništa drugo i

³ Kruzak d.o.o. (Grgić-Hudoletnjak, Maja) (1999.) "Euklid Elementi I- VI" Zagreb, str. 3

⁴ Preuzeto iz: Znam, Š i dr. (1989.) «Pogled u povijest matematike» Tehnička knjiga. Zagreb, str. 64

⁵ <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements>

⁶ Navodi se i velik broj drugih definicija koji se i danas koriste u matematici, kao na primjer "Tupi kut je onaj koji je veći od pravoga" – za pojam promjera je koristio drugačiju definiciju od one danas.

ne mijenja se na ništa drugo. (Prema Š. Znam «Pogled u povijest matematike» str. 57)⁷

Značajno mjesto u tome svemu pripada geometriji jer pomaže duši doći do pravih istina. Platon je matematičkim pojmovima dao njihov idealizirani oblik. Omogućio je da apstraktne stvari pretočimo u pojmove, koje danas svi matematičari koriste. Tako na primjer trokut postoji kao apstraktna ideja, no ipak postoje, pošto trokut nigdje u prirodi nismo u mogućnosti vidjeti. Euklid je apstraktne pojmove, koje je prvi kao takvima predstavio Platon, preuzeo bez ikakvih daljnjih dokaza, što je slučaj i u današnjoj matematici.

Uzmimo primjer Euklidove definicije «Točka je ono što nema dijelova». Gdje se kod točke, od strane Euklida, spominje točka kao beskonačno mala veličina. S tom se definicijom kroz povijest nisu slagali, pošto je smatrano da mora imati neku veličinu koja u biti nije djeljiva, jer ukoliko je djeljiva, ta polovina je manja od te same veličine. Ako je točka jednaka nuli, ona ne postoji. Euklidovo omeđenje točke je takvo kakvo jest, on ne naglašava položaj zato što je predodžba opće poznata. Euklidov iskaz se zasniva na platonskom odbijanju povezanosti ideje točke s materijalnošću. «Ideja dijelova se ne nalazi u ideji točke»⁸

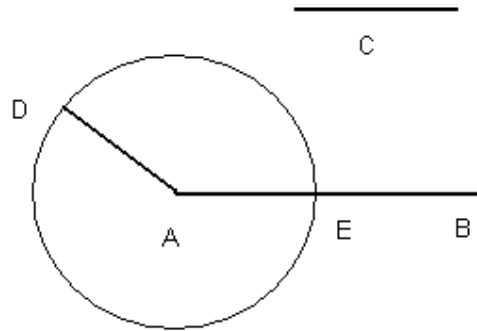
Platonistička geometrija ne dopušta gibanje i slobodno prenošenje dužina, pa iz tog razloga i sam Euklid taj pojam dalje ne razrađuje. Kako bi izveo svoje konstrukcije morao je proći komplicirane postupke, kao nadomjestak tomu, što će biti i prikazano na slijedećem primjeru

Primjer :⁹

⁷ - Dok se okolne stvari rađaju, mijenjaju i nastaju. Imaju čak i različite osobine prema kojima se ponašaju te razlikuju od ostalih stvari, kod ideja to nije slučaj.

⁸ Znam, Š i dr. (1989.) «Pogled u povijest matematike» Tehnička knjiga. Zagreb, str. 62

⁹ Pokušaj dokaza da ako su zadane dvije nejednake dužine, onda na veću treba prenijeti manju; Crtež je pojednostavljeni prikaz



1. Nad zadanom dužinom konstruirati jednakostraničan trokut .
2. Za zadanu točku A i dužinu BC konstruirati točku L tako da bude dužina AL jednak dužini BC. Konstrukciju 2 je primijenio Euklid u konstrukciji 3 u konstrukciji točke D. Načinio je to ovako: pomoću konstrukcije 1 konstruirao najprije nad dužinom AB jednakostranični trokut ABD, zatim kružnicu $k_1 = K(A, AB)$ (A, dužina AB), točku $H = K_1 \cap DB$, kružnicu $k_2 = k(D, DH)$ i dobije traženu točku $L = k_2 \cap DA$. Obrazložili smo uzroke složenosti konstrukcije 3.¹⁰

Prema Platonu su geometrijski oblici stalni i nepromjenjivi te objektivno postoje nezavisno o nama. Tamo gdje Euklid nije uspio zaobići gibanje mu je pojam sukladnosti pomogao. Euklid naravno nije upotrebljavao tu terminologiju. Ono što bi mi danas mogli shvatiti pod sukladno, je on tada nazivao prekrivanjem. Kada je jedan predmet u mogućnosti prekriti drugi u potpunosti, a točno to koristi u svom 4. aksiomu.

3.2. Aristotelov utjecaj na Euklida

Logika kakvom ju danas poznajemo ima Aristotela kao svoga začetnika. Aristotelovo učenje je također uvelike utjecalo na Euklida. Aristotel postavlja tri razine spoznaja:

¹⁰ Znam, Š i dr. (1989.) «Pogled u povijest matematike» Tehnička knjiga. Zagreb, str. 73

1. Osjećajna percepcija- koju ima samo živo biće
2. Iskustvo – pojavljuje se sjedinjenjem mnogih jednakih osjećaja sačuvanih u memoriji
3. Razumska spoznaja – koje poznaje početak i razlog posla i razlikuje čovjeka od zvijeri. ¹¹

Aristotel uvodi i razrađuje pojmove poput indukcija, dedukcija, silogizam i dokaz. Euklid upotrebljava pojam aksioma, za kojeg Aristotel tvrdi da je nužno istinit, te nema potrebe dokazivati ga. Euklid i Aristotel su oboje pojmove dijelili prema potrebi, opsegu ili stupnju apstrakcije.

Na primjeru "Točka je ono što nema dijelova " vidimo Aristotelov utjecaj na Euklida i njegove Elemente, jer je i Aristotel poput Euklida tvrdio kako točka ima poziciju za razliku od broja. Nekoj točki se može pridružiti neki broj iz brojevnog pravca, no poziciju ima samo točka. Aristotel postavlja neke zahtjeve koje bi se trebalo pratiti, kojih se Euklid također drži. Neki od tih zahtjeva su da bi se trebale upotrebljavati samo one riječi koje su jasno definirane i poznate, da se ne unose neki neosnovani uvjeti. Prema Euklidu je većina Aristotelovih zahtjeva ispunjena u problemu sa točkom. Euklid u potpunosti izostavlja filozofski dio Aristotelova učenja, te se koncentrira i prati praktični dio.

Euklid preuzima od Aristotela i pojam "opći aksiom" te stvara devet aksioma od kojih su najproblematičniji slijedeći:

7. Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake
8. Cjelina je veća od dijela ¹²

Izgleda kako bi prema 7. i 8. aksiomu, dva pravca istovremeno trebala biti i jednaka i međusobno različita. Prema 7. bi se oni nakon preklapanja trebali pokazati jednakima, prema 8. bi jedna dužina trebala biti veća jedna manja. dolazi do kontradikcije.

¹¹ «Pogled u povijest matematike» str. 59

¹² Kruzak d.o.o. (Grgić-Hudoletnjak, Maja) (1999.) "Euklid Elementi I- VI" Zagreb, str. 3

U Elementima nalazimo detaljne i obrađene geometrijske oblike, koje je Euklid preuzeo od Aristotela i nekih ranijih mislioca kao na primjer Pitagore. Mogu se usporediti čak i geometrijski dokazi koji nalikuju na unutarnju strukturu tragedije. Oba oblika teže dolaženju do istine od strane gledaoca ili matematičara. Vrhunac je spoznavanje istine, to jest uzroka.

« U teoremu je to pokazivanja (demonstracija), a u tragediji anagnozija, koju Aristotel definira kao 'prijelaz od neznanja k spoznaji slijevanje u osjećaje prijateljstva ili neprijateljstva između onih kojima je određena ili dobra ili zla sudbina'»¹³ Geometrijski su dokazi kako i činovi u tragedijama, usmjereni na spoznavanje istine.

4. Zaključak

Euklid je osoba iz povijesti koja ima i danas velik utjecaj na cjelokupnu ljudsku znanost. Euklidovi Elementi se kao i nekada, tako i danas koriste, bez da je velik dio izmijenjen ili proglašen netočnim. U Euklidovim Elementima se primjećuje znatan i vrlo bitan utjecaj velikana Platona i Aristotela. Platon je svojom filozofijom pomogao postaviti temelje za matematiku uopće, svojim apstraktnim viđenjem objekata i ideja. Najsuvremeniji matematičari čak i danas nisu odbacili Platonizam, mada se ponekad čini kontra-intuitivno vjerovati da trokuti i drugi mnogokuti postoje izvan vremena i prostora. Današnja matematika niti ne pokušava takvo nešto dokazivati, već to suptilno prepušta filozofima. Euklid je u tom djelu ostao vjeran tradiciji i poveo se za Platonom u njegovu razlikovanju ideja predmeta od samih predmeta kao materije.

Bez Aristotelove logike, Elementi ne bi izgledali ovako kako izgledaju. Naime, Aristotel je postavio logičku građu za rješavanje mnogih geometrijskih tajni i problema. Pomoću razjašnjavanja pojmova aksioma i postulata, Euklidu je na neki način olakšan put u postajanje tako velike ličnosti u povijesti matematike i čitavog čovječanstva.

¹³ «Pogled u povijest matematike» str. 71

5. Dodatci



Euklid



Razni pokušaju prijevoda Euklidovih Elementa



14

¹⁴ <http://skole.htnet.hr/os-rijeka-002/matematika/veliki%20matematicari.htm>

6. Bibliografija

- Kruzak d.o.o. (Grgić-Hudoletnjak, Maja) (1999.) "Euklid Elementi I- VI" Zagreb
- Znam, Š i dr. (1989.) «Pogled u povijest matematike» Tehnička knjiga. Zagreb
- <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/Euclid.html>, str.1-3
- www.schiller-institut.de/hrvatski/teetet.pdf
- <http://skole.htnet.hr/os-rijeka-002/matematika/veliki%20matematicari.htm>