

TEORIJA SKUPOVA

Zadaci

LOGIKA 1

1. godina

- Zapišite simbolima: (a) x nije element skupa S
(b) d je član skupa S
(c) F je podskup skupa S
(d) Skup S sadrži skup R
- Neka je $S = \{x; 2x = 6\}$ i neka je $b = 3$. Slijedi li iz toga da je $b \in S$?
- Neka je $S = \{r, s, t\}$. Odredite jesu li sljedeće tvdnje istinite i objasnite zašto:
 - $r \in S$
 - $r \subset S$
 - $\{r\} \in S$
 - $\{r\} \subset S$
- Koji su od sljedećih skupova jednaki?
 $\{r, t, s\}, \{s, t, r, s\}, \{t, s, t, r\}, \{s, r, s, t\}$

5. Koji su od sljedećih skupova različiti?

$$\emptyset, \{0\}, \{\emptyset\}$$

6. Ako je skup S podskup praznog skupa, dokažite da je onda skup S jednak praznom skupu.

7. Je li skup $S = \{2, 3, 4, 5\}$ podskup skupa $P = \{x; x \text{ je paran broj}\}$? Zašto?

8. Odredite kardinalnost skupa $\{\{2, 3\}\}$.

9. Neka je skup $S = \{2, \{4, 5\}, 4\}$. Odredite koje su od sljedećih tvrdnji istinite i zašto:

(a) $\{4, 5\} \subset S$

(b) $\{5\} \in S$

(c) $\{\{4, 5\}\} \subset S$

(d) $5 \in S$

(e) $\{5\} \in S$

(f) $\{5\} \subseteq S$

10. Neka je $S = \{0, 1, 2\}$. Odredite podskupove skupa S .

11. Neka je $S = \{0, \{1, 2\}\}$. Odredite podskupove skupa S .

12. Odredite uniju i presjek skupova S i P ako je $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $P = \{2, 4, 6, 8\}$.

13. Neka su zadani skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$.
Odredite:

(a) $A \cap B$

(b) $A \cap C$

- (c) $B \cap C$
- (d) $B \cap B$
- (e) $(A \cap B) \cap C$
- (f) $A \cap (B \cap C)$

14. Za skupove iz prethodnog zadatke odredite:

- (a) $A - B$
- (b) $C - A$
- (c) $B - C$
- (d) $B - B$

15. Pokažite da je $(A - B) \cap B = \emptyset$.

16. Ako je univerzalni skup $U = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$, a zadani su skupovi

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$, odredite:

- A^c
- B^c
- $(A \cap C)^c$
- $(A \cup B)^c$
- $(A^c)^c$
- $(B - C)^c$

17. Pokažite da je skup $B - A$ podskup skupa A^c .

18. Pokažite da vrijedi: $B - A^c = B \cap A$.

19. Neka je univerzalni skup $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ i neka su zadani

skupovi: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, g\}$, $C = \{b, e, f, g\}$. Odredite:

- (a) $C - B$

- (b) $A^c - B$
- (c) $(A - C)^c$
- (d) $(A - B^c)^c$
- (e) $B^c \cup C$
- (f) $C^c \cap A$
- (g) $(A \cap A^c)^c$

20. Neka je

$$(1) A = \{ \{ \{ 1 \}, \{ 0, 1 \} \}, \{ \{ 1 \}, \{ 1, 2 \} \} \},$$

$$(2) A = \{ \{ \{ 2 \}, \{ 1, 2 \} \}, \{ \{ 0, 2 \} \} \}$$

i neka je $B = \cup_{x \in A} X$, $C = \cap_{x \in A} X$.

Za slučajeve (1) i (2) odredite:

- (a) B
- (b) C
- (c) $\cup_{x \in B} X$
- (d) $\cup_{x \in C} X$
- (e) $\cap_{x \in B} X$
- (f) $\cap_{x \in C} X$

21. Za skupove iz prethodnog zadatka (posebno za (1) i (2)) odredite:

- (a) $A - B$
- (b) $C - A$
- (c) $B - C$
- (d) $B - B$

22. Skupovi A i B zadovoljavaju uvjete:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$
- $A \cap B = \{4, 6, 9\}$
- $A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$
- $B \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Odredite skupove A i B .

23. Skupovi A i B zadovoljavaju ove uvjete:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A \cap B = \{3, 4, 5\}$
- $1 \notin A \setminus B$
- $2 \notin B \setminus A$

Odredite skupove A i B .

24. Odredite skupove A i B ako oni zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{4, 6\} \not\subset A$
- $\{5, 6\} \not\subset B \setminus A$

25. Dokažite da vrijede jednakosti:

- a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$
- b) $A \cap B^c = A - (A \cap B)$
- c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

26. Uvjerite se da vrijede ekvivalencije:

- a) $A \subseteq B$ ako i samo ako $(A \setminus B = \emptyset)$
- b) $(A \cap B = A)$ ako i samo ako $(A \cup B = B)$
- c) $(A \cup B = B)$ ako i samo ako $(A \cap B^c = \emptyset)$

27. Zadani su skupovi $A = \{1, 3, 5, 7\}$ i $\{1, 7, 8\}$. Ispišite sve elemente od

- a) $\wp(A)$
- b) $\wp(B)$
- c) $\wp(A \cup B)$
- d) $\wp(A \cap B)$

28. Dokažite da vrijedi: $(A \setminus B) \subseteq (A \cup B)$

29. Dokažite da vrijedi:

- a) ako je $A \subseteq B$, onda je $(B - A) \cup A = B$.
- b) ako je $B \subset A$, onda $A - B = A \cap B^c$
- c) ako $A \not\subset B$, onda $A - B = A - (A \cap B)$

30. Odredite:

- a) \emptyset^c
- b) $U \cap A$
- c) $A' \cap A$
- d) $\emptyset \cap A$
- e) U^c

31. Odredite jesu li sljedeće izjave istinite i pojasnite zašto:

- (b) $x \in \{\{x\}, \emptyset\}$

- (c) $\{x\} \in \{\{x\}, \emptyset\}$
- (d) $\{x\} \subseteq \{\{x\}, \emptyset\}$
- (e) $\{\{x\}, \emptyset\} = \{\{x\}\}$
- (f) $\{x\} \subseteq \{\{x\}, x\}$
- (g) $\{\{x\}, \emptyset\} \subseteq \{x\}$

32. Što možemo reći o skupovima A i B, ako za njih vrijedi:

- (a) $A \subseteq A - B$
- (b) $A \subseteq B^c$
- (c) $A^c \subseteq B$
- (d) $A - B \subseteq B$
- (e) $A \cup B = A \cap B$

33. Neka vrijedi sljedeće: $A \subseteq C$, $B \subseteq D$, $C \cap D = \emptyset$ i $A \cup B = \mathcal{U}$.

Pokažite da u tom slučaju vrijedi da je $A = C$ i $B = D$.

34. U kakvom su odnosu skupovi A, B, C, ako vrijedi sljedeće:

$A \cup B \subseteq C$ i $A \cap C \subseteq B$ i $B \cup C \subseteq A$?

35. Odredite skupove.

- (a) $\emptyset \{ a, \{a\}, \{a, \{a\}\} \}$
- (b) $\emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset$

36. Dokažite: $A \subseteq B \leftrightarrow \wp(A) \subseteq \wp(B)$

37. Dokažite:

- (a) $\wp(A) \cup \wp(B) \subseteq \wp(A \cup B)$
- (b) $\wp A \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$

38. Ima li među skupovima jednakih: \emptyset , $\{\emptyset\}$, $\{0\}$? Vrijedi li relacija «biti podskup» ili «biti element» među nekima od tih skupova?
39. Neka su zadani skupovi: $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$. Jesu li sljedeće izjave istinite: $A \in B$, $A \subseteq B$?
Odredite $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.
40. Simetrična razlika (ili diferencija) između skupova A i B (oznaka: $A \Delta B$) definira se na sljedeći način: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dokažite da vrijedi: $A \Delta A = \emptyset$.
41. Dokažite da za proizvoljne skupove A i B vrijedi:
 $A = B$ ako i samo ako $A \Delta B = \emptyset$.
42. Neka su A , B , i C proizvoljni skupovi. Dokažite sljedeće tvrdnje:
- (1) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$
 - (2) Ako je $A = B \cup C$ i $B \cap C = \emptyset$, onda je $A \setminus B = C$.
 - (3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
 - (4) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
 - (5) $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$
 - (6) $A \setminus B = A \cap B^c$
 - (7) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$
 - (8) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$
 - (9) $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$
 - (10) $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$
 - (11) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$
 - (12) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
 - (13) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

$$(14) (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

$$(15) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

43. Ako je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 7\}$, odredite $A \Delta B$.

44. Odredite $\wp(A)$, ako je $A = \{3, \{1, 4\}\}$.

45. Neka su A , B , i C proizvoljni skupovi. Dokažite sljedeće tvrdnje:

$$a) A \cap (A \Delta B) = A \Delta (A \cap B)$$

$$b) A \cap B = (A \Delta B) \Delta (A \cup B)$$

46. Neka su A , B , i C proizvoljni skupovi. Dokažite da vrijedi:

$$a) A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$b) A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

$$c) A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$$d) \text{ Ako vrijedi da je } A \setminus B = C, \text{ onda je } A = B \cup C$$

$$e) A \Delta B = A \cup B \text{ ako i samo ako } A \cap B = \emptyset$$

47. Odredite čemu su jednaki sljedeći skupovi:

$$a) \emptyset \cap \{\emptyset\}$$

$$b) \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\}$$

$$c) \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset$$

$$d) \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$$

$$e) \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\}$$

48. Neka su A i B proizvoljni skupovi. Pokažite u (a), (b) i (c) primjeru sljedeće: ukoliko jedna od relacija vrijedi, onda vrijede i sve ostale.

(a) $A \subseteq B, A^c \supseteq B^c, A \cup B = B, A \cap B = A$

(b) $A \cap B = \emptyset, A \subseteq B^c, B \subseteq A^c$

(c) $A \cup B = \mathcal{U}, A^c \subseteq B, B^c \subseteq A$

49. Navedite primjer skupova A, B, C, D, i E tako da istovremeno vrijede sljedeći uvjeti: $A \subseteq B, B \in C, C \subseteq D, i D \subseteq E$.

50. Neka su A, B, C, D proizvoljni skupovi. Pojednostavite sljedeće izraze:

a) $(A \cup B) \cup B^c$

b) $(A \cap B^c)^c \cup B$

c) $A \cap (A^c \cup B)$

d) $(A^c \cap (A \cup B))^c$

e) $(A - B) \cup (A \cap B)$

f) $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

g) $(B - A) \cup (A - B^c)$

h) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C \cap D) \cup (A \cap A^c)$

i) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B) \setminus (A \cup (B \setminus C)) \cap A$

j) $(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup B^c \cup C^c$

k) $(A \cap B \cap C \cap X^c) \cup (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C) \cup (C \cap X)$

l) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$

51. Dokažite da vrijedi:

(a) $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$
 $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ ako i samo ako $A \cap C = \emptyset$

$$(b) \quad A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \text{ ako i samo ako } A \cap C = \emptyset$$

52. Skup A je **tranzitivan** ako za svaki element a skupa A vrijedi da je svaki element od a ujedno element skupa A, tj. ako iz

$$x \in a \text{ i } a \in A \text{ slijedi } x \in A$$

Po drugoj, ekvivalentnoj, definiciji skup A je tranzitivan ako vrijedi za svaki njegov element a da

$$\text{iz } a \in A \text{ slijedi } a \subseteq A.$$

Pokažite da su definicije ekvivalentne.

53. Odredite koji su skupovi tranzitivni:

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$$

54. Dokažite da je skup tranzitivan ako i samo ako je $A \subseteq \wp(A)$.

55. Na Odsjeku za filozofiju neki se profesori bave etikom, neki estetikom, neki ontologijom a neki logikom. Tko se bavi estetikom, bavi se i logikom. Tko se bavi etikom ili estetikom, bavi se i ontologijom. Tko se bavi logikom, bavi se etikom ili ontologijom. Tko se bavi logikom i estetikom, bavi se i etikom. Odredite u kojemu su odnosu skupovi:

$$A = \{x, x \text{ je profesor sa Odsjeka koji se bavi etikom}\},$$

$$B = \{x, x \text{ je profesor sa Odsjeka koji se bavi estetikom}\},$$

$$C = \{x, x \text{ je profesor sa Odsjeka koji se bavi ontologijom}\} \text{ i}$$

$$D = \{x, x \text{ je profesor sa Odsjeka koji se bavi logikom}\}.$$

56. Neka su A, B, i C proizvoljni skupovi. Dokažite da vrijedi:

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \text{ ako i samo ako } C \subseteq A.$$

57. Odredite vrijedi li jednakost

$$(A \cup (B \cap C)) - (B^c \cap C) = (A - ((B \cap C^c) \cup (B^c \cap C))) \cup (B \cap C)$$

LITERATURA

- Dell'Acqua, A. R., i Speranza, F., 1971, *Matematica I*, Zanichelli.
- Lipschutz, S., 1964, *Set Theory and Related Topics (Schaum)*, McGraw-Hill, Inc.
- Maher, L. P., 1968, *Finite Sets: Theory, Counting, and Applications*, Charles E. Merrill Publishing Company.
- Papić, P., 2000, *Uvod u teoriju skupova*, HMD.
- Pavković, B., i Horvatić, N., 1983, *Matematika I*, Školska knjiga Zagreb.
- Radić, M., 1982, *Algebra – I. dio: Logika, skupovi, brojevi*, Školska knjiga Zagreb.
- Rakovec, J., 1983, *Matematične strukture*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.
- Stoll, R. R., 1979, *Set Theory and Logic*, Dover Publications, Inc.
- Yakovlev, G. N., 1984, *High-School Mathematics – Part I*, Mir Publishers.