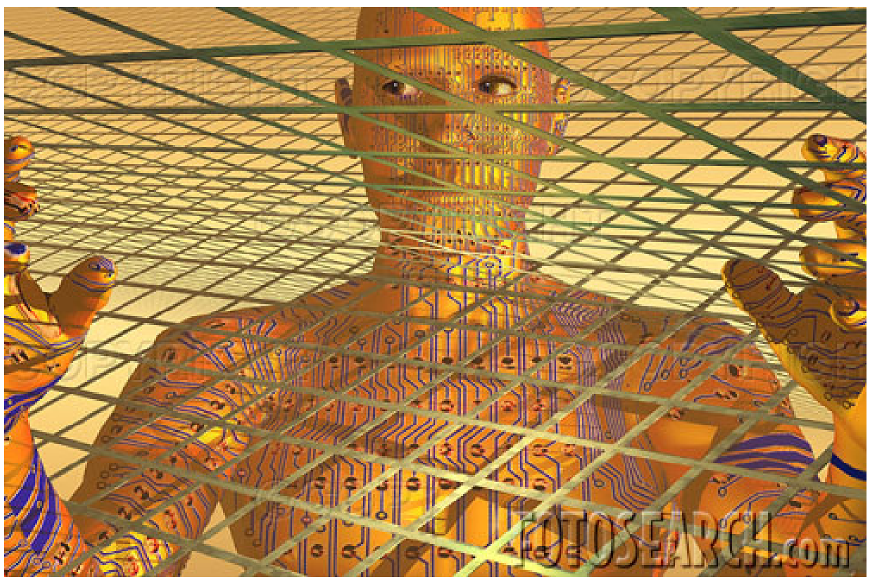
Filozofski fakultet u Rijeci
Odsjek za filozofiju

Seminar iz Filozofije matematike

Strukturalizam u filozofiji matematike



Student: Marko Jurjako

Smjer: Filozofija i povijest

Akademska godina: 2006./2007.

Sažetak

Cilj ovog seminara je dati pregled strukturalizma u filozofiji matematike. U seminaru se najvećim dijelom bavim zastupnicima strukturalizma Michaelom Resnikom i Stewartom Shapirom, iz razloga što su oni u novije doba najistaknutiji pobornici tog smjera u filozofiji matematike i nude razrađene prikaze svojih ideja. U uvodu se kratko osvrćem na pojam 'strukture' i prikazujem općenite ideje strukturalizma u filozofiji matematike. U nastavku dajem prikaz različitih verzija strukturalizama i problema za tradicionalni platonizam, koje je prvi formulirao Benacerraf (epistemološki problem i problem neodređenosti), te način na koji Resnik i Shapiro nastoje riješiti zadane probleme. U zaključku dajem kratak osvrt na neke stvari koje obrađujem u seminaru.

Ključne riječi: strukturalizam, filozofija matematike, problem neodređenosti, epistemološki problem, realizam/antirealizam, platonizam.

Uvod

Glavna ideja strukturalizma u filozofiji matematike je to da je matematika o strukturama. Općenita ideja, možemo reći svakog strukturalizma, je ta da se stvari u pitanju zahvaćaju i razmatraju njihovim međuodnosima, koji sami čine strukturu. U povijesti društvenih i humanističkih znanosti, naročito u drugoj polovici 20. stoljeća razvio se cijeli niz strukturalističkih programa koji su razmatrali društvenu zbilju kao skup strukturalnih odnosa.[1] Kao što je malo prije rečeno, zajednička karakteristika svih strukturalističkih pozicija, uzmimo u društvenim znanostima, bilo bi vjerovanje da fenomeni ljudskog života nisu spoznatljivi osim kroz njihove međuodnose. Prema Blackburnovu rječniku iz filozofije[2], ti odnosi konstituiraju strukturu, i iza lokalne varijacije površinskog fenomena postoje konstantni zakoni apstraktne strukture. Ovaj kratki opis strukturalizma općenito služi kao uvod i kao svojevrsno pojašnjenje samog pojma strukturalizma, u nadi da će to pomoći u daljnjem izlaganju strukturalizma u filozofiji matematike, unatoč tome što strukturalističko gledište u matematici u principu ne dijeli ništa s gore navedenim, osim samog pojma strukture.

[1] Kratak pregled povijesti strukturalizma može se naći na stranici wikipedie: http://en.wikipedia.org/wiki/Structuralism

[2] Dictionary of philosophy, Simon Blackburn, Oxford university press, 2005.

Strukturalizam u matematici je gledište prema kojemu ono čime se bavi matematika su strukturalni odnosi predmeta, neovisno o intrinzičnoj prirodi samih predmeta. Za strukturalizam u matematici se može reći da je to studija o tome što strukture (matematički objekti) jesu i kako bi se ontologija tih struktura trebala shvaćati.[3] U svojoj knjizi Philosophy of mathematics Brown[4] ističe da je strukturalizam glavni protivnik platonizma u ''borbi'' za afekciju realista. Ta tvrdnja je donekle ispravna, s obzirom da najistaknutiji zastupnici strukturalizma, čijim ću se pozicijama ovdje najviše baviti, su realisti u pogledu postojanja matematičkih objekata (detaljnije izlaganje slijedi) i u pogledu istinosne vrijednosti matematičkih iskaza. Kao glavni zastupnici strukturalizma u filozofiji matematike uzimaju se Michael Resnik i Stewart Shapiro i unatoč razlikama među njima kao osnovnu ideju strukturalizma možemo navesti Resnikov citat: *''Matematički objekti su bez-svojstvene, apstraktne pozicije u strukturama (ili više sugestivno, uzorcima); moja paradigma matematičkih objekata su geometrijske točke, čiji identiteti su fiksirani samo kroz odnose jednih prema drugima''*[5].

Povijesno gledajući, strukturalizam u matematici se razvija u drugoj polovici 19. stoljeća. Kao veliki korak naprijed se smatra oslobođenje geometrije od fizičkog prostora, kada autori poput Hilberta i Poincaréa daju svoja objašnjenja predmeta geometrije. Oba autora su smatrala da pojmovi poput ''točke,'' ''linije,'' i ''ravnine'' su definirani samo u terminima jednih prema drugima i oni se ispravno apliciraju na bilo koji sistem objekata koji zadovoljavaju aksiome.[6] Kao izravan prethodnik strukturalizma ističe se Dedekind čiji se citat, koji Shapiro navodi na početku svoje knjige[7], može uzeti kao strukturalistički manifest. Na ovom mjestu ću izdvojiti taj pasus:

Ako u razmatranju jednostavnog beskonačnog sistema ...skup uređen transformacijom... mi u potpunosti zanemarujemo posebne karakteristike elemenata; jednostavno zadržavajući njihovu razlikovnost i uzimajući u obzir samo relacije jednih prema drugima u kojima su oni smješteni po skupovno uređenim transformacijama... tada se ti elementi zovu prirodni brojevi ili ordinalni brojevi ili jednostavno brojevi.[8]

Neki od poznatih struktralista su Benacerraf, Harman, White, Jubien i Hellman. No razlog zbog kojeg se najviše ističu Resnik i Shapiro, i razlog zbog kojeg ću se najviše baviti njima, je taj što su oni među rijetkima pružili obranu i jasna objašnjenja svoje pozicije unutar strukturalizma.

---

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Structuralism

[4] James R. Brown, Philosophy of mathematics: an introduction to the world of proofs and pictures, Routledge, London i New York, 1999., str. 57

[5] Micheal D. Resnik , Mathematics as a science of Patterns, Oxford university press Inc., New York, 1999., str. 4 (moj kurziv)

[6] Stewart Shapiro, Philosophy of mathematics: structure and ontology, Oxford university press, New York, 1997., str. 14

[7] Ibid.

[8] Ibid., moj kurziv

Za daljnje viđenje strukturalizma možemo se poslužiti analogijom Browna[9] koji uspoređuje tradicionalni platonizam sa strukturalizmom. Platonizam smatra da iskazi matematike opisuju matematičke objekte, isto kao što znanost opisuje objekte prirodnog svijeta. Prema platonistima matematičke strukture su sastavljene od tih objekata, dok strukturalisti okreću tu ideju na suprotnu stranu i tvrde da su strukture primarne, a matematički objekti nisu ništa više nego mjesta u strukturi.

Znači prema strukturalistima ono čime se matematika bavi nije sistem skupova ili Platoničkih objekata ili ljudi, već ona opisuje strukturu ili klasu struktura.[10] Prema tome ono što je interes bavljenja aritmetike jest struktura prirodnih brojeva, uzorak koji je zajednički bilo kojem sistemu objekata koji ima određeni početni objekt i relaciju sljedbenika koja zadovoljava princip indukcije. Grubo rečeno, esencija prirodnog broja je relacija koju on ima s drugim prirodnim brojevima.[11] Ono što se tvrdi jest to da biti, recimo, prirodni broj 2 ne znači ništa više nego biti sljedbenik sljedbenika od 0, biti praćen brojem 3, biti prvi prim broj, itd. Ono što je važno (kao što će kasnije biti prikazano) je to da se strukturu prirodnih brojeva može egzimplificirati pomoću von Neumannovih konačnih ordinala, Zermelovim numeralima, arapskim numeralima, nizom različitih trenutaka u vremenu i slično. Isto tako navodi Shapiro[12] da je Euklidska geometrija o strukturi Euklidskog-prostora, topologija o topološkim strukturama itd. Ukratko objekt je samo mjesto u strukturi, što znači da bilo što može egzemplificirati recimo broj 12, to može biti zvijezda, temporalni trenutak, niz crtica... samo da se nalaze na prikladnom mjestu u strukturi. Osim glavne ideje da se matematika bavi strukturama koja je svima zajednička različite verzije strukturalizma se razlikuju u više pogleda i to zahtjeva određene podjele.

---

[9] James R. Brown, Philosophy of mathematics: an introduction to the world of proofs and pictures, Routledge, London i New York, 1999., str. 57

[10] Stewart Shapiro, Philosophy of mathematics: structure and ontology, Oxford university press, New York, 1997., str. 132

[11] Ibid., str. 5

[12] Ibid., str. 6

Vrste strukturalizma

Prema Dummetu[13] imamo dvije verzije strukturalizma, koje on naziva mističnim i tvrdoglavim (hardheaded). Prema mističnoj verziji matematika se bavi apstraktnim strukturama čiji elementi nemaju neka izvan strukturalna svojstva, objekti u strukturi nisu dani u izolaciji, oni su bez-strukturna mjesta u strukturi. Ono po čemu se mistično gledište ističe (i zato ga vjerojatno naziva mističnim) je gledište prema kojemu do apstraktnih struktura dolazimo psihološkim apstrahiranjem, i ono što nam treba je ne-apstraktni sistem s kojim bismo počeli. Ideja je da su apstraktni sistemi slobodne kreacije ljudskog uma.[14]

Prema tvrdoglavoj verziji elementi sistema koji se analiziraju nisu matematički objekti pošto objekti ne mogu imati samo strukturalna svojstva. Prema ovoj verziji strukturalizma elementi sistema kojima se bavi matematika su empirijski objekti i smatra se da nije važno za matematiku da li takvi sistemi zaista postoje. Matematička teorija se bavi svim sistemima s danom strukturom, govor o strukturama je samo ''ekonomičniji'' govor o svim sistemima koji egzemplificiraju strukturu. To je vrsta strukturalizma ''bez struktura''.[15]

Shapiro uvodi drukčiju distinkciju među verzijama sturkturalizma koja je ipak nešto više nego samo terminološka. Dummetov mistični strukturalizam se može usporediti sa Shapirovim *ante rem* strukturalizmom. Prema tom gledištu strukture su pravi objekti koji postoje neovisno o postojanju sistema koji egzemplificira tu strukturu. Ovdje je vidljiva analogija sa univerzalijama, no unatoč sličnosti s univerzalijama Shapiro ističe da strukture nisu mobilizirane da igraju onu vrstu objašnjenja ili opravdanja zbog kojih se univerzalije uvode.[16] Nije tako da smo opravdani u korištenju von Neumannovih ordinala kao modela za aritmetiku zato što egzemplificira strukturu prirodnih brojeva već, tvrdi Shapiro, stvari idu obrnutim smjerom. Upravo na ovom mjestu se može napraviti distinkcija između mističnog i *ante rem* strukturalizma. Prema Shapirovom gledištu apstraktne strukture nisu tvorevine ljudskog uma već njih možemo promatrati kao realno postojeće uzorke koje imaju svoje instance u svijetu, koje stoje u odnosu kao što je partikularija prema univerzaliji ili primjerak prema tipu. Prema tome Shapirov *ante rem* strukturalizam se može gledati kao na neku verziju platonizma.

Druga verzija strukturalizma, koju Shapiro poistovjećuje s Dummetovim tvrdoglavim strukturalizmom ima više *in re* pristup.[17] Tako iskazi aritmetike oblika ''2 + 3 = 5'' nisu o

---

[13] Vidi Majda Trobok, Platonism in the philosophy of mathematics, University of Rijeka, Faculty of Arts and Sciences, Rijeka, 2006., str 70

[14] Ibid.

[15] Ibid. str. 71

[16] Stewart Shapiro, Philosophy of mathematics: structure and ontology, Oxford university press, New York, 1997., str. 9

[17] Ibid.

specifičnim objektima denotiranim sa ''2'', ''3'', i ''5''. Nego, kaže Shapiro, svaki takav iskaz je generalizacija nad svim sistemima prirodnih brojeva: ''2 + 3 = 5'' znači '' u svakom sistemu prirodnih brojeva, objekt na drugom mjestu dodan objektu na trećem mjestu daje objekt na petom mjestu''.[18] Prema *in re* pristupu ne postoji struktura ako nema sistema koji ju egzemplificira. Shapiro izjednačava *in re* pristup sa eliminativnim strukturalizmom, kojeg je zastupao i sam Benacerraf.[19] No između te dvije pozicije treba naglasiti razliku. Naime, iako obje verzije podržavaju *in re* pristup prema strukturama, Shapirov *in re* strukturalizam ne zahtjeva da se sistemi sastoje od empirijskih objekata.[20]

Prema eliminativnom strukturalizmu, kao i ostalim, brojevi nisu ništa više nego mjesta u strukturi prirodnih brojeva. Biti broj 4 znači biti prethođen brojevima 0, 1, 2, 3 i biti praćen brojevima 5, 6, 7, itd. Prema ovom gledištu svaki predmet može igrati ulogu četvorke ili bilo koje druge brojke u progresiji, što znači da bilo koji predmet može zauzimati, recimo četvrto mjesto u progresiji. Prema tome teorija brojeva nije o nekim određenim objektima-brojevima.

Postoji još jedna verzija strukturalizma koju valja spomenuti, a to je modalni eliminativni structuralizam. Prema toj poziciji aritmetika se tiče svih logički mogućih sistema određenog tipa. Prema modalnom eliminativnom strukturalizmu nije nužno pretpostaviti da sistem koji egzemplificira danu strukturu postoji; dostatno je da je takav sistem logički moguć.[21] Znači, prema ovom gledištu prihvaća se realizam u pogledu istinosnih vrijednosti matematičkih iskaza i antirealizam u pogledu ontologije.

Svaka od ovih pozicija ima svoje prednosti i nedostatke u pogledu rješavanja određenih problema koji se tiču filozofije matematike, no u nastavku ću se najviše usredotočiti na gledišta samog Shapira i Resnika te ću prikazati njihova nastojanja i način na koji rješavaju probleme koji zahvaćaju tradicionalni platonizam.

[18] Ibid.
[19] Kasnije će biti razjašnjena Benacerrafova uloga u razvitku strukturalizma.
[20] Majda Trobok, Platonism in the philosophy of mathematics, University of Rijeka, Faculty of Arts and Sciences, Rijeka, 2006., str 73
[21] Ibid.

Ontologija strukturalizma

Dva se pitanja ističu koja se odnose na ontologiju strukturalizma: jedno se odnosi na ontologiju matematičkih objekata, drugo se odnosi na ontologiju samih struktura.[22]

Ante rem strukturalizam

Prema *ante rem* strukturalizmu, kako ga izlaže Shapiro, matematički objekti postoje nezavisno od matematičara i prema tom gledištu tvrdnje, uzmimo aritmetike, imaju nepraznu, bivalentnu, objektivnu istinosnu-vrijednost u odnosu na svoju domenu. Shapiro smatra da su, prema a*nte rem* strukturalizmu, prirodni brojevi mjesta u strukturi prirodnih brojeva, i da aritmetička teorija tertira te brojeve iz mjesta-su-objekti perspektive.[23] Razlika s obzirom na tradicionalni platonizam je utolika što prema ovome gledištu nije moguće utvrditi esenciju broja bez referiranja na druge brojeve. Drugim riječima brojevi kao takvi nemaju intrinzičnih svojstava.

Što se tiče samih struktura *ante rem* strukturalizam ima realistički pristup kao što je već ranije bilo istaknuto. Drži se da su strukture samoopstojeći objekti koji postoje nezavisno od toga da li postoji neki sustav koji ih egzemplificira. Ukratko, svojstva strukture postoje nezavisno od nas, numerali su singularni termi i matematičke tvrdnje se trebaju ''čitati'' doslovno (at face value).

Resnikov strukturalizam

Kao što je već rečeno Resnik također prihvaća osnovne teze strukturalizma. Matematika je znanost uzoraka (patterns)[24], a matematički predmeti su samo pozicije u uzorcima. Kada govori o uzorcima on ima na umu apstraktne uzorke, koji su tipovi (types), i oni se moraju

[22] Ibid. str. 75

[23] Shapiro razlikuje perspektivu mjesta-su-uredi od perspektive mjesta-su-objekti. Prema prvoj perspektivi mjesta u uzorcima su poput ureda koja mogu okupirati različiti objekti i riječi koje denotiraju urede igraju ulogu predikata. Prema drugoj perspektivi mjesta u uzorcima tretiramo poput objekata, i riječi koje ih denotiraju u tom slučaju imaju ulogu singularnih terma. Vidi: Stewart Shapiro, Philosophy of mathematics: structure and ontology, Oxford university press, New York, 1997., str. 10

[24] Resnik koristi termine strukture i uzorka (pattern) naizmjenično.

razlikovati od konkretnih uzoraka, koji su primjerci (tokens).[25] Prema Resniku primjerci uzorka ili strukture se najčešće odnose na konkretne crteže, modele i slično.

Prema Resniku uzorci se sastoje od jednog ili više objekta, koje naziva pozicijama, a one stoje u različitim odnosima. Resnik uspoređuje poziciju sa točkom u geometriji, u smislu da, kao geometrijska točka, pozicija ne može biti diferencirana izvan uzorka kojem pripada.[26] Kao što je već ranije bilo istaknuto kod Shapira, govor o matematičkim objektima je način govora o uzorcima ili strukturama i njihovim pozicijama.

Prema Resniku, unatoč tome što se matematika bavi strukturama i njezinim instancijama, on izbjegava tretirati uzorke kao entitete bilo koje vrste.[27] Iako on egzistencijalno kvantificira nad strukturama, to bi se trebalo shvatiti kao skraćivanje određenih matematičkih iskaza i ne bi se trebalo uzimati doslovno (at face value). Strukture koje matematička teorija opisuje ne pripadaju njezinoj domeni diskursa i matematika ne priznaje njihovo postojanje kao objekata, kao što ni teorija skupova ne kvantificira nad hijerarhijom teorije skupova. Ono što u krajnjoj liniji Resnik tvrdi jest to da pozicije u strukturi mogu biti realne iako same strukture nisu. I za to nudi dva razloga, jedan je već prije spomenuti koji kaže da tipične matematičke teorije ne potvrđuju njihovo postojanje, ne kvantificiraju nad njima, a drugi ja taj što neke matematičke teorije identificiraju strukture s matematičkim objektima dok druge to ne rade. Stoga prema Resniku ne postoji činjenica stvari (fact of the matter) koja bi pokazivala da li su strukture objekti bilo kakve vrste.

Problem tradicionalnog platonizma

Najzastupljenija model-teorijska semantika koja se koristi kako u znanstvenom tako i u jeziku matematike povlači sa sobom realizam u pogledu eniteta matematike. Da bi se to uvidjelo može se razmotriti kroz funkcioniranje jezika i pretpostavke koje leže u njegovoj pozadini. Standardni semantički pristup koji se koristio u istraživanju prirode brojeva podrazumijeva korespondencijsku teoriju istine, princip kompozicionalnosti i tezu sintaktičke prioritetnosti. No, meni je u ovom slučaju bitna pretpostavka sintaktičke prioritetnosti. Semantička razlika između objekta iz domene i podskupa domene korespondira sintaktičkoj razlici između singularnog terma i generalnog terma. Imamo model (D, f) koji se sastoji od predmetne domene i interpretacijske funkcije f. Interpretacijska funkcija f dodjeljuje točno

[25]Majda Trobok, Platonism in the philosophy of mathematics, University of Rijeka, Faculty of Arts and Sciences, Rijeka, 2006., str. 78
[26] Majda Trobok, Platonism in the philosophy of mathematics, University of Rijeka, Faculty of Arts and Sciences, Rijeka, 2006., str. 79
[27] Ibid. str. 80

jedan predmet svakom singularnom termu u rečenici. Dakle, da ne duljim ako izraz pripada sintaktičkoj kategoriji singularnih terma, njegova interpretacija je objekt.[28] Drugim riječima teza se može ovako izraziti: 'ako izraz pripada sintaktičkoj kategoriji singularnih terma i pojavljuje se u istinitoj rečenici tada postoji predmet na koji referira'.[29] Teza sintaktičke prioritetnosti otkriva skrivenu pretpostavku jezika koja se tiče relacije između sintaktičkih kategorija i ekstenzionalne semantičke vrijednosti.

> Jednom kad se prihvati, reprezentacijska teorija jezika sa standardnim semantičkim pristupom vodi do ontologizacije onoga što se čini da je referent singularnog terma. U filozofskim razmatranjima o prirodi kardinalnih brojeva prihvaćanje numerala kao singularnih terma vodi do ontološke teze da su brojevi objekti.[30]

Iz takvog gledišta dolazimo do realističkog gledišta u pogledu matematičkih predmeta, tj. do realizma u ontologiji. To bi značilo prihvaćanje apstraktnih predmeta u našu ontologiju. To samo po sebi ne predstavlja filozofski problem, barem ne u ontološkom smislu, no u epistemološkom smislu javlja se problem koji zahvaća svaki platonizam. Ako su predmeti matematike apstraktni predmeti koji se nalaze izvan prostorno-vremenskog neksusa, dakle ako su kauzalno inertni, kako možemo išta znati o njima, kako možemo imati povjerenja u matematičare koji govore o njima,... . Problem je prvi jasno artikulirao Benacerraf.

Drugi važan problem za tradicionalni platonizam u matematici koji je također formulirao Benacerraf tiče se identiteta matematičkih objekata. Dobro je poznato da se gotovo svako polje matematike može reducirati na, ili modelirati u, teoriju skupova.[31] Tu možemo vidjeti i princip Ockhamove britve, jer zašto pretpostavljati postojanje brojeva, točaka, funkcija i skupova kad su sami skupovi dovoljni? No tu se javlja problem. Postoje najmanje dvije redukcije aritmetike na teoriju skupova. Ako su prirodni brojevi matematički objekti, kao što tvrdi realist, i ako svi matematički objekti jesu skupovi, tada postoji činjenica koja se tiče toga koji su skupovi prirodni brojevi.[32] Prema von Neumannu prirodni brojevi su konačni ordinali, a prema Zermelovu gledištu brojevi su numerali[33].

Kao što je vidljivo, prema von Neumannovoj redukciji $1 \in 3$ dok prema Zermelovoj $1 \notin 3$. Ostavlja se otvorenim pitanje što su zapravo prirodni brojevi? Jesu li oni Zermelovi numerali, von Neumannovi ordinali ili neki drugi skupovi? Takav problem na koji je ukazao Benacerraf naziva se problemom neodređenosti.

[28] Za razrađeni uvid vidi: http://www.ffst.hr/~berislav/personal/Mathplaton.pdf
[29] Ibid., str 3
[30] Ibid.
[31] Stewart Shapiro, Philosophy of mathematics: structure and ontology, Oxford university press, New York, 1997., str. 5
[32] Ibid.
[33] Pogledaj tablicu, str. 17

Ta dva, vrlo značajna pitanja, o spoznaji i prirodi matematičkih objekata su na neki način odredili smjer razvoja strukturalističke filozofije matematike. Kako na ta pitanja odgovaraju Resnik i Shapiro vidjeti ćemo u nastavku.

Strukturalizam i problem neodređenosti

Eliminativni strukturalizam

Prvo ću iznijeti način na koji eliminativni strukturalizam, koji zastupa Benacerraf, nastoji riješiti problem neodređenosti matematičkih objekata, s obzirom da je on prvi koji je ukazao na taj problem.

Benacerraf se ovim problemom bavio u svom članku 'What numbers could not be' i on tamo zaključuje, da s obzirom na to da postoji više mogućnosti kako identificirati brojeve sa skupovima, da brojevi ipak ne mogu biti skupovi. Problem je što nema načina na koji bismo mogli odrediti istinosnu vrijednost rečenice oblika '3 = {Φ, {Φ, {Φ}}}' i čini se da nema argumenta koji bi mogao prevagnuti.

Benacerraf proširuje svoj argument za tvrdnju da brojevi ne mogu biti skupovi na zaključak da brojevi nisu objekti uopće.[34] Prema njemu problem identificiranja brojeva s nekim objektima je jednostavno besmisleno (pointless). Pokušaj identificiranja je besmislen jer u nabrajanju svojstava koja su nužna i dovoljna za biti određeni broj, mi samo karakteriziramo apstraktnu strukturu, a važna razlika leži u činjenici da ''element'' strukture nema drugih svojstava osim onih koje ima u relaciji s drugim ''elementima'' iste strukture.[35] Na ovom mjestu se vidi snažan poticaj, koji je Benacerraf dao, da se matematički predmeti gledaju kao na pozicije ili mjesta u strukturama i koji kao takvi nemaju identiteta izvan danih struktura (naravno, ne u smislu da je on prvi zastupao strukturalizam, već u smislu da je ukazao kako se na takvo pitanje može odgovoriti zastupajuću strukturalizam).

Prema tome teorija brojeva nije o određenim objektima-brojevima, nego je o svojstvima svih sistema brojeva uređenog tipa.[36] I ono što on čini u svom negiranju postojanja brojeva jest to da ih poistovjećuje sa numeralima. Kaže Benacerraf:

[34] Majda Trobok, Platonism in the philosophy of mathematics, University of Rijeka, Faculty of Arts and Sciences, Rijeka, 2006., str. 85
[35] Vidi: ibid. str. 86
[36] Ibid.

> *... u brojanju, mi ne koreliramo skupove s inicijalnim segmentima brojeva kao ekstra-lingvističkim entitetima, nego koreliramo skupove sa inicijalnim segmentima niza brojeva* ***riječi.***[37]

Jedino što je važno, u teoriji brojeva, jest struktura i svaki sistem objekata koji oblikuje rekurzivnu progresiju (egzemplificira strukturu prirodnih brojeva) je adekvatan.

Ante rem strukturalizam i problem neodređenosti

Kao što je već poznato, prema Shapirovom *ante rem* gledištu matematika se bavi apstraktnim strukturama. Elementi struktura nemaju izvan-strukturalna svojstva i sve što možemo reći o brojevima sastoji se u njihovim strukturalnim svojstvima, ovisno o tome kojoj strukturi pripadaju. Nije moguće postulirati jedan realni broj jer bi to značilo postuliranje jednog mjesta unutar strukture, što nije moguće bez pozivanja strukture kao cjeline.[38]

Prema tome, brojevi nemaju identiteta izvan strukture, i slično kao Benacerraf, smatra da njihovo identificiranje sa skupovima spada samo u interstrukturalne odnose. Stoga, pitanja koja se tiču brojeva moraju biti internalna strukturi prirodnih brojeva. Za razliku od Benacerrafa, Shapiro ipak smatra da su brojevi objekti, oni su objekti aritmetike i o tim objektima ima smisla postavljati pitanja i to ona pitanja koja su internalna strukturi, tj. koja se mogu formulirati u jeziku aritmetike.

Resnikovo rješenje problema neodređenosti

Resnik zauzima malo drugačiji stav prema pitanju neodređenosti. Kao što je ranije napomenuto, prema Resniku nema činjenice stvari (fact of the matter) o tome da li su brojevi skupovi. Ono što on u biti čini jest to da negira istinosnu vrijednost rečenicama tipa 'brojevi su skupovi'.

Resnik to čini na temelju svojih razmatranja o jeziku. Za njega pojam 'činjenica stvari' je imanentan, tj. ograničen na specifične jezike.[39] Prema njegovoj diskvotacijskoj teoriji istine nemamo predikata oblika 'jest činjenica stvari' koji koreliraju ekstra-lingvističkoj stvarnosti, ono što imamo je usporedba s drugim rečenicama. Prema diskvotacijskom pristupu jedan od načina na koji se može negirati istinosna vrijednost rečenice je taj da se ograniči logika tako da se,

---

[37] Ibid., moj kurziv

[38] Ibid.

[39] Za više vidi: Micheal D. Resnik, Mathematics as a science of Patterns, Oxford university press Inc., New York, 1999., str. 243-244

recimo, zakon isključenja trećeg ne aplicira generalno. I to je ono što Resnik čini, jer nije mu dovoljno da tvrdi kako matematika ne potvrđuje niti negira tvrdnje oblika 'brojevi su skupovi' (zato što prema Resniku nije uopće jasno da matematički dio jezika uopće sadrži takvu rečenicu), s obzirom na to da kad se bavi matematikom njegov jezik sadrži rečenice takva oblika (koje izražavaju identitet različitih matematičkih objekata). I kad on kaže da nema te činjenice stvari da li su brojevi skupovi onda podrazumijeva da takve rečenice i one s njima u vezi nemaju istinosnu-vrijednost.

S obzirom na njegovu holističku viziju znanosti važno mu je to da niti u znanosti općenito nema ničega što bi moglo igrati veću ulogu pri razmatranju za ili protiv toga da su brojevi skupovi. Izgleda kao da, Resnik kaže, jedino tko se zanima za taj odgovor su filozofi.[40]

No, koliko je uopće dobar razlog, za takvo stajalište, to što matematika niti ne potvrđuje niti negira identitet brojeva i skupova? Što se toga tiče matematika je neutralna zato što to nije njezina domena interesa. U knjigama više matematike često je objašnjeno više mogućih identifikacija brojeva i nije u interesu matematike dovoditi u pitanje problem neodređenosti.[41] Problem postojanja brojeva nije ono čime se matematika bavi i u matematici se to ne predstavlja kao problem. Može se reći da do uviđanja problema dolazimo filozofskom refleksijom, no ti problemi najčešće ne predstavljaju stvar interesa profesionalnih matematičara, kao što ni filozofske implikacije teorija percepcije najčešće ne zanimaju profesionalne psihologe.

Reći da nema činjenice o stvarima o tome da li su brojevi skupovi zato što matematika to niti negira niti potvrđuje je isto kao i reći da nema činjenice o stvarima o tome da li se sunce okreće oko zemlje ili obrnuto, pošto meteorologija o tome ne kaže ništa.[42]

Strukturalizam i epistemološki problem

Glavni problem za platonističku ontologiju predstavlja kauzalna teorija znanja koja ide uz program ''naturalizirane epistemologije''. Teza naturalizirane epistemologije čini se uvjerljivo prihvatljivom, a to je da smo mi ljudi prirodna bića koja su situirana u fizikalnom svijetu i čije sposobnosti kognicije uključuju prirodne procese koji se mogu podvrgnuti znanstvenom

[40] Majda Trobok, Platonism in the philosophy of mathematics, University of Rijeka, Faculty of Arts and Sciences, Rijeka, 2006., str. 91
[41] Ibid. str. 92
[42] Ibid.

ispitivanju. No kako Shapiro naglašava[43], zadnjih desetljeća uzročna teorija znanja je bila izričito kritizirana, tako da trenutno nema nikakvog konsenzusa što se tiče pitanja epistemologije. Stoga, dostupni su mnogi smjerovi iz kojih se može zastupati realizam u pogledu matematičkih predmeta i ostati kompatibilan sa naturaliziranom epistemologijom. U nastavku ću izložiti na koji način Shapiro i Resnik nastoje riješiti epistemološki problem spoznatljivosti matematičkih objekata.

Epistemologija *ante rem* strukturalizma

Prema Shapiru, postoji tri načina zahvaćanja (spoznaje) struktura:

1. apstrahiranjem ili prepoznavanjem uzoraka
2. lingvističkim apstrahiranjem i
3. implicitnim definicijama

Važno je naglasiti da se ovi načini spoznaje nadovezuju jedan na drugi. Prema Shapiru, prepoznavanje uzoraka je proces zahvaćanja (grasping) manjih struktura. On koristi riječ apstrahirati u tradicionalnom smislu, u smislu procesa kojim zahvaćamo svojstva predmeta kao što su boja, oblik, veličina i slično. Prema Shapiru strukture se apstrahiraju od jednog ili više sistema koji imaju istu strukturu. Ovaj način je analogan načinu na koji zahvaćamo tip slova promatranjem različitih primjeraka slova i zanemarivanjem onoga što je specifično pojedinom primjerku kao što je boja, oblik, visina i slično.[44] To apstrahiranje funkcionira kao u slučajevima kada dijete nauči prepoznati uzorak recimo 5, nakon što vidi različite grupe od 5 predmeta.

Nakon toga dolazi drugi način, kojim zahvaćamo velike kardinalne strukure kroz lingvističko apstrahiranje. Kroz lingvistički razvoj djeca nauče baratati, tj. koristiti se primjercima nizova koja nikad nisu vidjela. Također, mogućnost baratanja se proširuje na nizove koji nikad nisu imali primjerka i koji možda nikad neće imati.[45]

Shapiro daje primjer djeteta koje uči uzorke reprezentirane na sljedeći način:

|, ||, |||, ||||.

[43] Stewart Shapiro, Philosophy of mathematics: structure and ontology, Oxford university press, New York, 1997., str. 109

[44] Majda Trobok, Platonism in the philosophy of mathematics, University of Rijeka, Faculty of Arts and Sciences, Rijeka, 2006., str. 93

[45] Stewart Shapiro, Philosophy of mathematics: structure and ontology, Oxford university press, New York, 1997., str. 117

Ovaj uzorak se može gledati kao niz, kao konačna kardinalna struktura ili slično. Dalje reflektiranjem o ovim konačnim uzorcima dijete može shvatiti da niz uzoraka ide puno dalje nego što je ono u mogućnosti vidjeti instance toga. Na taj način dijete počinje shvaćati niz od 9000 ili više crtica i tada zahvaća ideju takvog uzorka. Kaže Shapiro: ''Možda je to njezino prvo naziranje *ante rem* strukture.[46] Iako nema razloga da se ne ostane na empirijskom nivou koji ne uključuje apstraktne neistancirane strukture.

Sljedeći korak je zahvaćanje strukture prirodnih brojeva koja je beskonačna. Shapiro nastavlja primjer s djetetom koje je sad već odraslije i nadalje reflektira o nizu sve većih i većih konačnih struktura dok ne zahvati pojam *konačnog niza* per se.[47] Sljedeći uzorak je potencijalno beskonačan:

|, ||, |||, ||||, …

Pomalo uviđa da za svaki niz postoji unikatan sljedeći-najduži niz, s toga se zaključuje da nema najdužeg niza. I u konačnici se shvaća da sustav konačnih nizova je potencijalno beskonačan. Na taj način se dolazi do strukture prirodnih brojeva, i slično, jednom kad se ta struktura shvati tada se prema Shapiru i ostale beskonačne strukture mogu opisati u tim terminima. Kao primjer se nudi struktura cijelih brojeva, koja je slična strukturi prirodnih brojeva, samo je beskrajna u oba smjera.[48]

Treći način da se zahvati struktura je kroz implicitnu definiciju. Znači kroz definiciju direktno opisujemo strukturu. Kao primjer nam se nude Peanovi aksiomi koji su implicitna definicija za strukturu prirodnih brojeva. Razumijevanjem aksioma mi zahvaćamo stukturu. Shapiro definira implicitnu definiciju kao simultanu karakterizaciju većeg broja predmeta u terminima odnosa jednih prema drugima.[49] S obzirom na implicitnu definiciju i dedukciju Shapiro zaključuje da matematičko znanje može biti *a priori,* iz razloga što pomoću izvođenja logičkih posljedica iz implicitnih definicija dobivamo znanje o definiranim strukturama bez da je uključeno senzorno iskustvo.

Resnikova epistemologija

Resnik kao i Shapiro, s obzirom na svoj realizam, nastoji objasniti kako dobivamo matematičko znanje samo kroz naše uobičajene sposobnosti. Resnikova osnovna ideja je da mi

[46] Ibid. str. 118
[47] Ibid.
[48] Za više pogledaj: ibid., str. 120
[49] Ibid. str. 132

dolazimo do matematičkih objekata na način da ih postuliramo[50]. Ovo se na prvi pogled čini čudnim, s obzirom da Resnik zastupa realizam u pogledu matematičkih objekata, koji bi trebali postojati neovisno o nama. No, Resnik razjašnjava svoju ideju te kaže da bi prepoznali matematičke objekte mi ih moramo prvo postulirati i uvesti termine za njih. U svojoj ideji Resnik se poziva na znanost te naglašava da konstruiranje teorija često ne ide kao posljedica otkrivanja, imenovanja i opisivanja stvarnosti, već često u postuliranju mi prvo opisujemo, a zatim nalazimo dokaze koji potvrđuju neovisno postojanje našeg postulata.

Resnik naglašava da postuliranje brojeva i skupova ne dovodi u pitanje njihovo neovisno postojanja, kao što u znanosti postuliranje planeta Neptuna ili kvarkova ne dovodi njih u pitanje.

Postuliranje matematičkih objekata za Resnika ne uključuje ništa više ''mistično'' nego nego što je sposobnost pisanja romana, izmišljanja mitova ili teoretiziranje o neprimjetljivim utjecajima na vidljivi svijet. Postulirati matematičke objekte znači jednostavno uvesti diskurse o njima i potvrditi njihovo postojanje.[51]

No, analogija s postuliranjem, recimo likova u romanima, može biti samo djelomična. Razlika je u tome što nas postuliranje matematičkih objekata vodi do znanja dok ovo drugo ne vodi. Matematičko postuliranje odgovara potrebi kao što je proširenje domene prijašnjih rezultata ili odgovara na još neodlučena pitanja.[52]

Uzevši u obzir Resnikovu 'postulacijsku epistemologiju' postavlja se pitanje kriterija, tj. kada određeni term referira na određeni objekt? Pošto on smatra da su matematički objekti apstraktni, što znači da nema kauzalne veze između nas i njih, onda on odbacuje uzročnu teoriju referencije i zamjenjuje ju s već ranije spomenutom imanentnom teorijom referencije. Prema imanentnoj teoriji referencije za:

a) singularne terme vrijedi da: Za bilo koji x, singularni term 't' referira na x akko x=t, gdje je t shematsko slovo koje stoji (u ovom slučaju) za hrvatske singularne terme.
b) predikate vrijedi da: Za bilo koji x, predikat 'F' referira na x akko x jest F, gdje je F shematsko slovo koje stoji za jednomjesni (u ovom slučaju) za hrvatske predikate.[53]

Ova teorija referencije mu omogućava da bez problema referira na matematičke objekte.

Predikat 'broj', naprimjer, referira na objekt ako i samo ako je broj. Kraj priče. [54]

---

[50] Resnik upotrebljava izraz 'to posit'.
[51] Micheal D. Resnik , Mathematics as a science of Patterns, Oxford university press Inc., New York, 1999., str. 185
[52] Majda Trobok, Platonism in the philosophy of mathematics, University of Rijeka, Faculty of Arts and Sciences, Rijeka, 2006., str. 99
[53] Ibid. str 100

Osim što daje odgovor na pitanje kako spoznajemo matematičke objekte općenito, Resnik nudi i odgovor na pitanje kako zahvaćamo uzorke ili strukture. Svrha postuliranja matematičkih objekata jest ta da opiše strukture. Prema Resniku, plauzibilno je dopustiti da sistemi fizičkih objekata koji instanciraju strukture mogu nas obavijestiti o svojstvima matematičkih objekata. I prema Resniku to je ono što su ljudi u prošlosti radili.[55]

Znanje o strukturama započinje iskustvom primjerka sistema. Kao primjer se može uzeti sistem točaka za brojanje. Upotrebom sistema točaka mi (ili stari[56]) smo mogli zaključiti da zbrajanje i množenje su asocijativni i komutativni, da množenje distribuira nad zbrajanjem i da je 1 multiplikativni identitet.[57] Od toga je u konačnici mogla nastati i teorija brojeva.

Kada se govori o uzorcima, reći da se vidi ili intuira uzorak prema Resniku se ne bi trebalo shvatiti doslovno. I to iz razloga što se nema što vidjeti u uzorku osim njenih pozicija. Vidjeti ili intuirati uzorak znači shvatiti da ga određeni sistem instancira.[58] Ono što nas vodi znanju o apstraktnim strukturama je iskustvo sa primjercima koje je u početku reprezentiralo samo ono strukturirano, konkretne stvari, a kasnije počinje reprezentirati apstraktne strukture kojima konkretne stvari postaju instance koje zadovoljavaju zadane uvjete strukture. U krajnjoj liniji s obzirom da nije moguće imati beskonačne konkretne instance nužno je okrenuti se lingvističkim pomagalima, tj. upotrebi aksioma.

Zaključak

U ovom seminaru nastojao sam iznijeti gledišta koja zastupaju najistaknutiji pobornici strukturalizma u filozofiji matematike. Resnikov i Shapirov pogled na prirodu i spoznaju matematičkih objekata je doista zanimljiv i čini se dosta intuitivno prihvatljiv, no naravno kao i svaka druga pozicija u filozofiji stukrturalizam nije bez mana. Mnoge kritike su upućene na račun strukturalizma, kojima se ja ovdje nisam bavio. Nakana mi je bila dati samo pregled najistaknutijih pozicija unutar strukturalizma i njihova rješenja za goruća matematička pitanja kao što su pitanje neodređenosti i pitanje spoznatljivosti matematičkih objekata.

---

[54] Michael D. Resnik, Mathematics as a science of Patterns, Oxford university press Inc., New York, 1999., str. 193, moj kurziv

[55] Za Resnikovo kvazi-povijesno objašnjenje vidi: ibid., poglavlje 9

[56] ancients

[57] Majda Trobok, Platonism in the philosophy of mathematics, University of Rijeka, Faculty of Arts and Sciences, Rijeka, 2006., str. 101

[58] Ibid. str. 102

Zanimljivo je kako Resnik zastupa 'postulacijsku epistemologiju' i takvo viđenje nastoji pomiriti sa svojim realističkim pogledom na opstojnost matematičkih objekata. Imamo li razloga prihvatitirealistički stav prema postulatima? Koliko god se to povezivalo sa praksom bavljenja znanošću mislim da je to krivi stav koji se zauzima prema egzistenciji objekata. Ako je postuliranje entiteta glavna praksa u znanosti, a jedino što je važno su posljedice tih postulacija za predviđanje pojava, tj. ako gledamo samo kako funkcionira teorija (sa svojim dijelovima) onda mi se čini da bi pravi stav prema postuliranim entitetima trebao biti antirealistički. Pogotovo ako imamo više teorija koje objašnjavaju istu stvar, onda nas ne može voditi istina u odabiranju ispravne teorije, već pragmatika. Sam Resnik preuzima imanentnu teoriju referencije, prema kojoj se eksplicitno kaže da termi ne referiraju na ništa izvan-jezika, oni se samo apliciraju na jezik. Samo po sebi, to nije toliko problematično, mi imamo određene intuicije i nastojimo razviti gledišta kako bismo ih opravdali. No zašto, iz postuliranja objekata čiji referent ostaje samo u jeziku zaključiti na realizam u pogledu tih objekata. Sva ta quineovska ontološka relativnost koja proizlazi iz takvog gledišta, ne bi se trebala uzimati doslovno već kao ograničenje našeg znanja. Ako je između znanosti i same matematike granica zamagljena, tj. ne može se jasno odrediti i ako se na postojanje matematičkih predmeta zaključuje kao što se u znanosti zaključuje na postojanje njezinih objekata, tada mi se čini da bi prema takvom gledištu bilo ispravnije zauzeti antirealistički stav. I sam Shapiro naglašava da sve što se veže uz ontologiju je vezano uz jezik te da svemir dijelimo prema **našim** lingvističkim mogućnostima.[59]

Isto je tako zanimljivo kako se može osvježiti odnos sa idejama antičkih filozofa poput Pitagore. Kada se napusti standardni semantički pristup numerali se mogu koristiti kao da djelomično referiraju na određene elemente u svakom nizu. Ako se numerali shvate kao funkcijski izrazi, što je u duhu strukturalizma, može se uzeti da je prvi element u nizu denotiran sa, recimo, '0(p)' ili 'prvi element element u progresiji p' i svi ostali se mogu definirati pomoću funkcije sljedbenika.

Čitano na takav način, ovo se može gledati kao na vrstu pitagoreanizma, pošto svaki predmet može biti broj ako se uredi u prikladnoj progresiji. (Žarnić, 1999.)

[59] Stewart Shapiro, Philosophy of mathematics: structure and ontology, Oxford university press, New York, 1997., str. 261

Tablica

von Neumann	Zermelo
0 = Φ	0 = Φ
1 = {Φ}	1 = {Φ}
2 = {Φ, {Φ}}	2 = {{Φ}}
3 = {Φ, {Φ, {Φ}}}	3 = {{{Φ}}}
.	.
.	.
.	.

Prikaz redukcije brojeva na skupove

Bibliografija

Brown, James, *Philosophy of mathematics: an introduction to the world of proofs and pictures*, Routledge, London i New York, 1999.

Resnik , Michael, *Mathematics as a science of Patterns, Oxford university press Inc.*, New York, 1999.

Shapiro, Stewart, *Philosophy of mathematics: structure and ontology*, Oxford university press, New York, 1997.

Trobok, Majda, *Platonism in the philosophy of mathematics*, University of Rijeka, Faculty of Arts and Sciences, Rijeka, 2006.

Stefanik, Richard, Structuralism, *Category Theory and Philosophy of Mathematics;*

http://www.mmsysgrp.com/strctcat.htm

Žarnić, Berislav, Do numerals name Numbers?;

http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome10/art11.htm

Žarnić, Berislav, *Mathematical Platonism: from objects to patterns*;

http://www.ffst.hr/~berislav/personal/Mathplaton.pdf