Filozofski fakultet u Rijeci
Odsjek za filozofiju

Seminar iz Filozofije matematike

Kantova filozofija matematike

Student: Igor Eterović
Smjer: Filozofija/Povijest
Ak. god.: 2005./2006.

Sažetak

U uvodnom se dijelu rada upoznajemo ukratko sa stanjem u novovjekovnoj filozofiji matematike neposredno prije Kanta te dolazimo do zaključka da je središnja motivacija za Kantovu filozofiju matematike bio pokušaj rješenja nedostataka obiju tada vodećih filozofskih škola – racionalizma i empirizma.

Središnji dio rada pokušava osvijetliti i ukratko razjasniti što bi za Kanta značilo da su matematičke propozicije sintetičke *a priori*. Prvi je korak u tome zadatku davanje kratka opisa temeljnih termina Kantove filozofije matematike, ali i njegove filozofije uopće. Razmatraju se distinkcija sintetički-analitički, *a priori* i zrenje/zor. Nakon toga koncentriramo se na pojam konstruktibilnosti (matematičkih pojmova) kao temeljan za razjašnjenje navedena Kantova stava o matematičkim propozicijama. Naposljetku otvaramo neka pitanja i probleme vezane za Kantov pristup matematici te razmatramo moguće odgovore.

Na samom kraju, u zaključku rada, donosimo kratak osvrt na nezaobilazan Kantov utjecaj na cjelokupno postkantovsko promišljanje filozofije matematike.

1. Uvod – filozofija matematike neposredno prije Kanta

Prvi filozof koji se nakon Aristotela značajnije usredotočio na matematiku bio je Immanuel Kant (1724.–1804.).[1] Kao i u svakoj drugoj grani filozofije, tj. kao i sa svakim drugim problemom u filozofiji s kojim se uhvatio ukoštac, Kant je tako i na polju filozofije matematike ponudio njemu svojstveno revolucionarno gledište. Prije nego krenemo na samo izlaganje njegova pogleda, osvrnut ćemo se na motivaciju koja leži u osnovi tog novog pristupa matematici.

Sedamnaesto je stoljeće stoljeće velike znanstvene revolucije, s kojom je usporedno tekla i revolucija u matematici. Nositelji su te revolucije bili, u prvom redu, Rene Descartes, Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz. Zahtjevi fizike koja se naglo razvijala postavljali su nove zahtjeve matematici, tj. oni su prirodno vodili u razvitak novih matematičkih grana te novim koncepcijama onih starih. "Važnije su inovacije uključivale nove metode analize, povezujući geometriju s algebrom i aritmetikom (Pierre Fermat i Descartes), te razvoj računa (Newton i Leibniz) za proučavanje gravitacije i gibanja. Newtonov je i Leibnizov račun uključivao pojmove neprekinutosti, derivacije i limitacije, od kojih se nijedan nije glatko uklapao u prethodne matematičke paradigme."[2] Dvije su vodeće filozofske struje onog vremena, *empirizam* i *racionalizam*, pokušale svaka na svoj način objasniti kako se matematika uklapa u prirodnu znanost i kakav je uopće njen status.

Racionalizam se razvio na europskom kontinentu, a uz Descartesa i Leibniza značajan je predstavnik ove struje mišljenja i Baruch Spinoza. Naglašavajući ulogu razuma kao suprotstavljena osjetilnom iskustvu u postizanju znanja, bili su Platonovi prirodni baštinici.[3] "Ekstremne su verzije toga gledišta smatrale da *sve* znanje jest, ili bi idealno trebalo biti, bazirano na razumu. Racionalistički je model za prikupljanje znanja matematika – konkretno matematička demonstracija."[4] Najbolji je primjer zasigurno *Etika* Barucha Spinoze, "dokazana geometrijskim redom"[5] i pisana po uzoru na Euklidove *Elemente*. Spinoza je izgradio svoje monumentalno djelo od definicija (*definitio*), aksioma (*axioma*), poučaka

[1] Stewart Shapiro tako naglašava: "Naša priča počinje u osamnaestom stoljeću, s Immanuelom Kantom. Bilo je, naravno, značajne filozofske aktivnosti još u antici nakon Aristotela i u srednjem vijeku, ali ne mnogo one u središtu čijega je proučavanja bila matematika." Shapiro, Stewart: *Thinking About Mathematics: The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, 2000., str. 73. Budući da je sva korištena sekundarna literatura za ovaj rad na engleskom jeziku, svi su prijevodi preuzetih navoda moji.
[2] Na i. mj.
[3] Usp. isto, str. 74.
[4] Na i. mj.
[5] Puni naslov glasi *Ethica Ordine Geometrico Demonstrata*.

(*propositio*), objašnjenja (*explicatio*), zahtjeva (*postulata*) i pomoćnih stavaka (*lemmae*).[6] Descartes je također bio opčinjen matematičkom metodom, u kojoj je vidio uzor za svekoliku spoznaju pa je tako velik dio njegova opusa posvećen pokušaju da pruži (prirodnoj) znanosti jednak stupanj sigurnosti kakav nalazimo u matematici. Prema tome bi znanost trebala biti utemeljena na filozofskim prvim principima, iz kojih bi se dalje u matematičkoj maniri izveli zakoni gibanja, što je Descartes i pokušao.[7]

Glavna je opozicija racionalizmu *empirizam*, kojemu se često daje pridjevak britanski jer svi njegovi značajni predstavnici potječu s tog područja i tamo djeluju: John Locke, George Berkeley, David Hume i Thomas Reid. Za razliku od racionalistâ oni najveću pažnju posvećuju osjetilima kao izvoru spoznaje. Njihova uobičajena teza jest da sve što znamo dolazi iz osjetilnog opažanja. Naš je um, prema riječima Lockea, prazna ploča na koju se ispisuju osjetilne informacije.

Nijedna od ovih škola nije dala podroban prikaz svoga stajališta o matematici, tj. neku sustavnu filozofiju matematike, već se o njihovu gledanju na matematiku zaključuje iz filozofskih opaski raštrkanih po njihovu čitavu opusu. Spomenute središnje epistemološke teze svake od ovih škola direktno su se odrazile na njihov pogled na matematiku. "Obje su strane, racionalisti i empiristi, smatrale da matematika govori o fizičkim veličinama ili protežnim objektima. Objekti se susreću empirijski. Dvije se škole razilaze u stavovima o umskom pristupu *idejama* protežnih objekata i o statusu rezoniranja o tim idejama."[8] No dok je Descartes, primjerice, držao da možemo neposredno rezonirati o "čistoj protežnosti", koja je u temelju svim fizičkim objektima, što "svjedoči o racionalističkom uvjerenju da je ljudski intelekt moćan alat za rezoniranje – matematičko – do temeljnih apriornih zaključaka o fizičkome svijetu"[9], empiristi su smatrali da su sve matematičke ideje izvedene iz iskustva: sve što imamo fizički su objekti. Tako do broja šest dolazimo apstrakcijom iz iskustva – opažajući šest objekata. Empiristi su se slagali, primjerice Hume u svojoj *Raspravi o ljudskoj prirodi*, s tim da se, jednom kada smo stekli matematičke (apstraktne) ideje, daljnje rezoniranje odvija neovisno o iskustvu. Glavni je spor između racionalistâ i empriristâ bio oko razmjera koji je trebalo pridati osjetilnom iskustvu u zahvaćanju i stjecanju matematičkih ideja.

---

[6] Nisu to svi elementi njegova "matematičkog aparata" u *Etici*, no za naš je prikaz i za uviđanje racionalističke opčinjenosti "matematičkom metodom" dovoljno toliko.
[7] Usp. Shapiro, nav. dj., str. 74.
[8] Isto, str. 74–75.
[9] Isto, str. 75.

Lisa Shabel sažeto i jasno iznosi zahtjeve koji su stajali pred objema školama: "Status je novovjekovne matematičke prakse pozvao novovjekovne *filozofe* matematike da daju odgovor na dva međusobno povezana pitanja. Pretpostavimo li da matematička ontologija uključuje brojive *empirijske* objekte, kako objasniti paradigmatska svojstva čistog matematičkog rezoniranja, a to su univerzalnost, sigurnost, nužnost? I, ne oduzimajući poseban status matematičkom rezoniranju, kako objasniti sposobnost matematike da dođe u dodir i opiše empirijski dostupan prirodni svijet? Prvo je pitanje postalo zahtjevom za *apriornost*: održiv filozofski prikaz rane novovjekovne matematike mora objasniti apriornost matematičkog rezoniranja. Drugo je pitanje postalo zahtjevom za *aplikabilnost*: održiv filozofski prikaz rane novovjekovne matematike mora objasniti aplikabilnost matematičkog rezoniranja. Naposljetku je, dakle, novovjekovni filozof matematike nastojao ponuditi objašnjenje odnosa između matematičkih svojstava objekata prirodnog svijeta i našu paradigmatično apriornu spoznaju o tome, zadovoljavajući time oba zahtjeva."[10]

Racionalisti su se izvrsno nosili sa zahtjevom apriornosti, slijedeći platonističku liniju: svijet je matematike idealan svijet koji se ne poklapa s našim fizičkim svijetom. "Nema kontingencije u mentalno zahvaćenim matematičkim idejama kao što je čista protežnost koja leži u osnovi fizičkim objektima. Možemo, naravno, griješiti u našem zahvaćanju matematičkih ideja ili u pokušaju demonstracije, ali metodološki prikladno izvedena matematika dostavlja samo nužne istine."[11] S druge strane, empiristi su, privrženiji možda aristotelovskom gledanju, puno bolje objašnjavali aplikabilnost matematike na fizički svijet, konkretno na fiziku kao prirodnu znanost. "U skladu s tom školom matematičke su ideje iščitane iz svojstava opaženih objekata i matematičari proučavaju odnose između tih ideja. Zbog toga su empiristi držali da matematičari indirektno razmatraju određene fizičke odnose između opaženih fizičkih objekata."[12]

Nemogućnost jednih i drugih da daju zadovoljavajući odgovor na oba zahtjeva pružilo je središnju motivaciju Kantu, koji "pokušava uskladiti ova dva zahtjeva sa svojom doktrinom transcendentalnog idealizma, donoseći argumente za sintetički *a priori* status matematičke spoznaje."[13]

---

[10] Shabel, Lisa, *Apriority and Aplication. Philosophy of Mathematics in the Modern Period*, 2006 (12. travnja), str. 2–3.; http://people.cohums.ohio-state.edu/shabel1/cv.html
[11] Shapiro, nav. dj., str. 75–76.
[12] Isto, str. 76.
[13] Shabel, nav. dj., str. 3.

2. Matematičke su propozicije sintetičke a priori propozicije

"Sukob je između racionalizma i empirizma glavna motivacija Kantu za pokušaj sinteze koja zahvaća ono najplauzibilnije obiju strana. Rezultat je toga bio herojski pokušaj da se objasni ili zadovolji nužnost matematike i apriorna priroda matematičke istine dok se objašnjava ili zadovoljava mjesto matematike u empirijskoj znanosti i, konkretno, primjenjivost na opaženi fizički svijet. Kantov je problem bio u tome kako pokazati apriornu spoznatljivost matematike i istovremenu univerzalnu primjenjivost – na čitavo iskustvo – s nepogrešivom sigurnošću. Njegovi pogledi na matematiku nisu sastavnica odvojiva od njegove cjelokupne filozofije. Naprotiv, primjedbe se o matematici pojavljuju u njegovu čitavu filozofskom pisanju. Upravo je zato važan ključ za razumijevanje Kanta razumijevanje njegovih pogleda na matematiku."[14]

"U svojoj *Kritici čistog uma* Kant istražuje izvore i granice čistog uma pomoću, konkretno, otkrivanja temelja mogućnosti sintetičkih *a priori* sudova: 'Pravi je pak zadatak čistoga uma sadržan u pitanju: kako su mogući sintetički a priori sudovi?'[15] Pri odgovaranju na to pitanje koje ga vodi Kant brani tvrdnju da su svi valjani matematički sudovi sintetički *a priori*[16], središnju tezu njegova prikaza matematičke spoznaje, i nudi objašnjenje za mogućnost takvih matematičkih sudova."[17]

2.1. Distinkcija analitički-sintetički, *a priori* i sposobnost zrenja

"Najintrigantnije je i najproblematičnije obilježje Kantove filozofije matematike njegova teza da su istine geometrije, aritmetike i algebre sintetičke apriorne istine utemeljene na 'zoru'."[18] Stoga je, prije nego krenemo u razmatranje razloga koje Kant nudi u prilog sintetičnosti i apriornosti matematičkih propozicija, potrebno razmotriti što za Kanta znači distinkcija analitički-sintetički te sam pojam *a priori*, a kratko ćemo se osvrnuti i na sposobnosti zrenja. To su ključni pojmovi Kantove epistemologije i temelji njegova transcendentalnog programa bez kojih je nemoguće shvatiti ijedan segment njegove filozofije pa tako ni filozofiju matematike.

---

[14] Shapiro, nav. dj., str. 76–77. O važnoj ulozi Kantove filozofije matematike za čitavu njegovu filozofiju v. više u Shabel, Lisa, *Kant's Philosophy of Mathematics*, str 27–35.

[15] Kant, Immanuel, *Kritika čistoga uma*, Nakladni zavod Matice Hrvatske, Zagreb, 1984., str. 382.

[16] Doduše, Kant ne niječe činjenicu da ima i analitičkih matematičkih sudova, primjerice "svi trokuti imaju tri stranice", no takvi sudovi naprosto ne pridonose matematičkoj spoznaji.

[17] Shabel, Lisa, *Kant's Philosophy of Mathematics*, 2006 (12. travnja), str. 1.; http://people.cohums.ohio-state.edu/shabel1/cv.html

[18] Shapiro, nav. dj., str. 77.

2.1.1. Distinkcija analitički-sintetički

"Za Kanta je univerzalna propozicija (oblika "Svi *S* su *P*") *analitička* ako je pojam predikata (*P*) sadržan u pojmu subjekta (*S*); inače je propozicija *sintetička*. Primjerice "svi neženje su neoženjeni" analitička je propozicija ako je pojam bivanja neoženjenim sadržan u pojmu neženje. "Svi ljudi su smrtni" analitička je propozicija ako je pojam smrtnosti sadržan u pojmu čovjeka. Budući da biti muško nije (po svoj prilici) dio pojma biti predsjednik, "svi predsjednici su muški" sintetička je propozicija."[19]

Drugim riječima ako shvaćamo značenje pojma "neženja", kao kontradikcija nam se nameće tvrdnja "neženje su oženjeni", jer je "neoženjenost" implicitno dana u samom pojmu "neženje" te je nemoguće da bude drugačije. Kant se slaže s Humeom da su analitičke propozicije neinformativne, tj. da ne pridonose našem znanju budući da njima samo raščlanjujemo ono što smo ionako već znali, te se okreće sintetičkim sudovima. Kod sintetičkih nam je sudova, pratimo li Kanta, potreban nekakav X koji će nam omogućiti povezivanje subjekta i predikata, jer pojam predikata nije implicitno dan u pojmu subjekta.

Ipak je možda najbolje vidjeti kako je sam Kant to uobličio:

> Iz toga je sada jasno: 1) da se pomoću analitičkih sudova naša spoznaja ne proširuje, nego se pojam, koji već imam, rastavlja i čini jasnim meni samome; 2) da kod sintetičkih sudova osim pojma subjekta moram imati još nešto drugo (X), na što se razum upire, da bi predikat, koji ne leži u onome pojmu, ipak spoznao kao nešto što njemu pripada.[20]

2.1.2. *A priori*

Radi pojašnjenja možemo Kantovu epistemologiju izložiti u formuli: *a priori* segment (sadržan u našem kognitivnom aparatu) + osjetilni podaci (dobiveni iz vanjskog svijeta). Za Kanta *a priori* znači neovisno o iskustvu, a kod spoznaje je aprioran onaj dio koji naš razum pridaje spoznaji. Zanimljivo je to što taj aprioran dio nikada ne dolazi sam u našoj spoznaji, jer je naša spoznaja sintetična. Uzmimo za primjer prirodnu znanost. Sud, odnosno empirijsku spoznaju "Sunce ugrijava kamen" moguće je zadobiti samo tako da zamjedbeni sud – puki osjetilni priljev[21] – supsumiramo (podvučemo) pod jednu od apriornih kategorija našeg razuma, konkretno tu kauzalnosti: "Svaka promjena u prirodi ima svoj uzrok". Dakle naš razum na neki način konstruira našu spoznaju kategorizirajući zamjedbene informacije prema nekim pravilima (kategorije razuma). I u matematici je prisutna opća ideja sintetičnosti

[19] Na i. mj.
[20] Kant, I., nav. dj., str. 26.
[21] Riječ je o osjetilnim informacijama, povezanim u konjunkciju uzastopnih opažaja: "Kada Sunce obasjava kamen, on postaje vruć."

spoznaje, no ona će ipak imati nešto posebniji status iz razloga što je onaj X potreban za sintetičku matematičku propoziciju tzv. 'čisti zor', o kojemu će biti kasnije riječi.

2.1.3. Sposobnost zrenja

Mnogi poistovjećuju Kantov zor sa zamjedbom što nije posve točno i može navoditi na krivi trag, jer se načešće pod zamjedbom podrazumijeva osjetilna zamjedba. Kant pod zrenjem podrazumijeva opažanje u najopćenitijem smislu. Naime on razlikuje dvije vrste zorova: empirijski zor i čisti zor. Empirijski je zor naprosto zamjedba, nekakva osjetilna informacija. Primjerice možemo imati zor olovke na stolu. Time Kant želi samo uputiti da su to zasada osjetilne datosti koje još nisu obrađene u našem kognitivnom aparatu, tj. na koje nije još izvršen aprioran upliv našeg razuma, nužan za cjelovitost spoznaje. Čisti je pak zor forma naše osjetilnosti, preduvjet empirijskog zrenja, da se izrazimo Kantovim riječima, "transcendentalna forma osjetilnosti". Riječ je o *čistom zoru prostora* i *čistom zoru vremena*. To da su čisti zor prostora i vremena transcendentalni ne znači ništa drugo nego da predstavljaju nužan uvjet mogućnosti svakog (empirijskog) opažanja. Jasnije rečeno, ne možemo razmatrati ni jednu stvar, a da je ne smjestimo u prostor i da se razmatranje ne odvija tijekom nekog vremena. Upravo je stoga čisti zor ono ključno za matematičke sudove i na njemu počiva pokušaj zadovoljenja apriornosti i sintetičnosti takvih sudova. Ujedno matematički sudovi time dobivaju jedan poseban status, jer se rezoniranje o njima odvija u domeni čistih zorova.

2.2. Konstruktibilnost matematičkih pojmova – temelj sintetičnosti i apriornosti

Kant smatra da je "čista"[22] matematika moguća zahvaljujući čistom zoru prostora i vremena. Naime razmatrajući matematičke objekte uviđamo da je to moguće jedino unutar čistog zora prostora (za geometriju) i čistog zora vremena (za aritmetiku), koji predstavljaju onaj neophodan element (onaj X[23]) za stvaranje sintetičkih (*a priori*) sudova čiste matematike. Moramo to malo razjasniti.

Argumente u prilog svojoj tvrdnji o sintetičnosti matematičkih sudova Kant daje odvojeno, raštrkano po čitavoj *Kritici čistog uma*. "Središnja je za njegov prikaz tvrdnja da je matematička metoda odvojena od filozofske po obilježju ovisnosti o konstrukciji – a ne

[22] "Čista" u smislu neopterećena osjetilnim uplivom, odnosno vezana konkretno uz ono što matematičari rade: izračunavanje bez pozivanja na fizički svijet.
[23] Usp. odlomak 2.1.1.

analizi – pojmova"[24]; "*Filozofijska* spoznaja jest *umska* spoznaja iz *pojmova*, matematička iz *konstrukcije* pojmova."[25] Za razliku od filozofske analize, gdje dolazimo do analitičkih sudova, u matematici je riječ o konstrukciji pojmova, tj. o sintetičkim sudovima. Kant o takvoj konstrukciji, kao argumentu za sintetičnost i ujedno apriornost matematičkih sudova, kaže sljedeće:

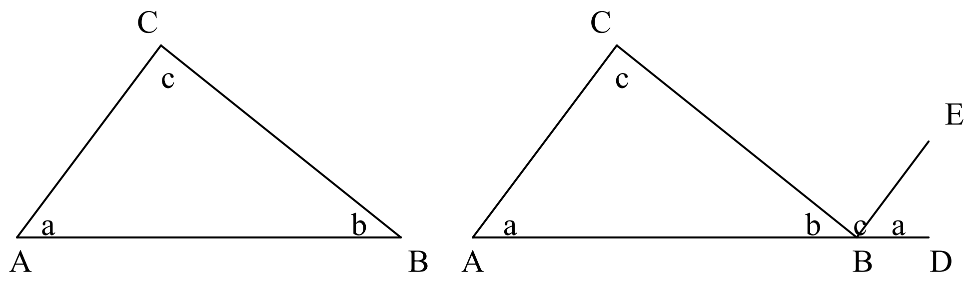
> Matematika daje najsjajniji primjer čistoga uma koji se sam od sebe sretno proširuje bez pomoći iskustva. [...] *Filozofijska* spoznaja jest *umska* spoznaja iz *pojmova*, matematička iz *konstrukcije* pojmova. *Konstruirati* pak pojam reći će: zor, koji mu odgovara, prikazati a priori. Za konstrukciju pojma zahtijeva se dakle *neempirijski* zor, koji je prema tome kao zor *pojedinačan* objekt, ali zato on kao konstrukcija pojma (neke opće predodžbe) isto tako mora izražavati opću vrijednost za sve moguće zorove koji pripadaju pod isti pojam. Tako ja konstruiram trokut, budući da predmet koji odgovara tome pojmu prikazujem pomoću same uobrazilje u čistome zoru ili prema toj uobrazilji i na papiru u empirijskome zoru, ali u oba slučaja potpuno a priori, ne uzimajući uzorak za nj iz nekog iskustva. Pojedina nacrtana figura jest empirijska, a unatoč tome služi da izrazi pojam bez štete po njegovu općenitost, jer se kod ovog empirijskoga zora uvijek gleda samo na radnju konstrukcije pojma za koji su mnoga određenja sasvim sporedna, npr. određene veličine stranice i kutova, pa se dakle apstrahira od tih različitosti koje pojam trokuta ne mijenjaju. Filozofijska spoznaja razmatra dakle ono posebno samo u općenitome, matematička ono općenito u posebnome, štoviše, čak u pojedinačnome, ali ipak a priori i pomoću uma.[26]

Ta se konstrukcija vrši zahvaljujući čistom zoru, tj. unutar čistoga zora, a to vrijedi kako za geometrijske pojmove tako i za aritmetičke. Po pogledu geometrije Kant je vrlo uvjerljiv:

> Filozofija se drži samo općih pojmova, ali matematika samim pojmom ne može ništa napraviti, nego se odmah žuri k zoru u kojem razmatra pojam in concreto, ali ipak ne empirijski, nego samo u takvome zoru koji je a priori prikazala, tj. konstruirala i u kojemu ono što slijedi iz općih uvjeta konstrukcije mora općenito vrijediti o objektu konstruiranoga pojma. Neka se filozofu dade pojam trokuta i neka on na svoj način pronađe kako se suma njegovih kutova odnosi prema pravome kutu. On dakle ima samo pojam o liku koji je omeđen s tri pravca, a u tome liku pojam o isto toliko kutova. On sada može razmišljati o tome pojmu dokle god hoće, pa neće izaći ništa novo. On može raščlanjivati i napraviti jasnim pojam pravca ili kuta ili broja tri, ali na druga svojstva, koja ne leže u tome pojmu, neće doći. Neka naprotiv geometar uzme pred sebe to pitanje. On odmah počinje time da konstruira trokut. Budući da zna da dva prava kuta iznose zajedno upravo toliko koliko iznose svi

[24] Shabel, L., *Kant's...*, str. 6.
[25] Kant, I., nav. dj., str. 319–320.
[26] Na i. mj.

usporedni kutovi koji se iz jedne točke mogu provući na pravcu, on produžuje jednu stranicu svoga trokuta i dobiva dva usporedna kuta koji su jednaki dvama pravima. Na to on dijeli vanjski od ovih kutova, povlačeći liniju paralelno sa stranicom trokuta koja stoji nasuprot, pa vidi da tu nastaje vanjski usporedni kut koji je jednak jednom unutrašnjem itd. Na taj način on putem lanca zaključaka, vođen uvijek zorom, dolazi do potpuno jasnog i ujedno općenitog rješenja pitanja.[27]



"Tu Kant referira na standardni euklidski dokaz da je suma kutova u trokutu jednaka dvama pravim kutovima (180°), koju nalazimo u Knjizi 1, Poučak 32 Euklidovih *Elemenata*. Kantova je perspektiva sugestivna. Kao što je ranije primijećeno, pojmovna analiza ne producira novo znanje, već samo razotkriva ono implicitno u pojmu – samo 'razdjeljuje' ili 'čini jasnim' dijelove koji su već ondje. Nasuprot tome matematika producira novo znanje. Njene konkluzije nisu implicitne u pojmovima. Zor nas opskrbljuje s primjerima objekata ili grupama objekata koji prikazuju pojam o kojem je riječ. Drugim riječima zrenje producira geometrijske figure ili brojčane kolekcije objekata. Međutim to je jedva dovoljan početak. Samo s primjerima matematičar ne bi mogao otići mnogo dalje nego što je to dostupno pojmovnom analizom. Zasad je sve što zna o primjerima to da imaju dani pojam koji je u pitanju te tako svaki drugi pojam sadržan u njima. Matematika otkriva novo znanje kroz aprioran mentalni proces *konstrukcije*. Matematičar nastavlja i djeluje na dani primjer, slijedeći pravila implicitna u 'čistom zoru'."[28]

Čisti nam je zor prostora potreban za mentalni proces konstrukcije spomenutog dokaza. Geometar je "vođen uvijek zorom" u stvaranju lanca inferencija. Ne postoji drugi način da se dođe do matematičkih konkluzija. No Kant zasigurno nije imao u vidu "izlaganje tipična ili paradigmatskog primjera danog pojma"[29], primjerice pojma trokuta. "Kantova opaska da 'se kod empirijskog zora uvijek gleda samo na radnju konstrukcije pojma' upućuje

[27] Isto, 320–321.
[28] Shapiro, nav. dj., str. 84–85.
[29] Isto, str. 82.

na uobičajenu tehniku u deduktivnom rezoniranju. Pretpostavimo da je geometar uključen u geometrijsku demonstraciju o jednakokračnim trokutima. Nacrta jedan takav trokut i razmišlja o njemu. Nadalje naš geometar priziva samo svojstva svih jednakokračnih trokuta i ne koristi se ni jednom drugom značajkom nacrtanog trokuta, kao što je točna veličina kutova ili je li baza kraća ili duža od ostalih stranica. Ako je uspješan, zaključci se mogu primijeniti na sve jednakokračne trokute. Takva je tehnika uobičajena u matematici."[30]

Analogno tome, u aritmetici "[t]eoretičar brojeva može započeti tvrdnjom 'neka *n* bude prost broj' i razmišljati dalje o 'primjerku' *n*, koristeći samo svojstva koja imaju svi prosti brojevi. Ako pokaže da *n* ima svojstvo *P*, teoretičar zaključuje da svi prosti brojevi imaju svojstva *P*, a može i podsjetiti čitatelja da je *n* 'arbitraran'."[31] Analogno konstrukciji u geometriji, Kant nudi sličan prikaz aritmetike:

> Isprva bi se doduše moglo misliti da je sud 7 + 5 =12 samo analitički sud, koji proizlazi iz pojma sume od 7 i 5 prema načelu proturječja. No ako stvar pobliže razmotrimo, onda ćemo utvrditi da pojam sume od 7 i 5 ne sadržava ništa više nego sjedinjenje obih brojki u jednu jedinu, a time se još nikako ne pomišlja koji je to jedini broj koji obuhvaća oba. Pojam dvanaest nipošto nije pomišljen već time što ja sebi zamišljam samo ono sjedinjenje o sedam i pet. Ja svoj pojam o takvoj mogućoj sumi mogu raščlanjivati dokle god hoću, ipak u njemu neću naći dvanaest. Čovjek mora izaći iz tih pojmova, uzimjaući u pomoć predodžbu koja jednome od dvaju od njih odgovara, recimo pet svojih prstiju ili [...] pet točaka, pa se tako jedinice u predodžbi danih pet postepeno dodaju pojmu sedam. [... V]idim kako na taj način nastaje broj 12. Da je 7 trebalo dodati broju 5, to sam doduše pomišljao u pojmu sume = 7 + 5, ali ne to da je ta suma jednaka broju 12. Aritmetički je sud dakle u svako doba sintetičan. Toga čovjek postaje to jasnije svjestan ako uzme veće brojke, jer onda postaje očigledno da samim raščlanjivanjem svojih pojmova nikada ne bismo mogli naći sumu ako ne uzmemo u pomoć predodžbu, kako god mi okretali i obrtali svoje pojmove.[32]

"Ponovno valja naglasiti da pojmovna analiza ne donosi sumu, budući da nam ništa u pojmu 7 i 5 ne daje broj 12. Da bismo dobili sumu, 'uzimamo u pomoć predodžbu koja jednome od njih dvaju odgovara, recimo pet svojih prstiju ili ... točaka'. To odgovara izlaganju u euklidovskoj demonstraciji. Trebamo primjer kolekcije od pet objekata. Međutim to nije dovoljno jer još nemamo sumu. Stoga 'jedinice u predodžbi danih pet postupno dodajemo pojmu sedam'. Taj ključan korak, gdje nastavljamo 'dodavati' jedinicu, odgovara

[30] Isto, str. 82–83.
[31] Isto, str. 83. Vodeći se tom linijom Shapiro u nastavku povlači interpretaciju Kanta preko suvremene logike. Naime opisani proces odgovara tzv. pravilu univerzalne introdukcije u sustavu prirodne dedukcije. Za više v. na i. mj.
[32] Kant., I, nav. dj., 380–381.

pomoćnoj konstrukciji. Matematičar tako producira brojeve 8, 9, 10, 11 i naposljetku vidi kako na taj način 'nastaje broj 12'. On tako *konstruira* nešto što nije implicitno sadržano u originalnom pojmu sume 7 i 5 kao ni u primjerima kojima nas je opskrbio zor."[33]

Vidimo da je i u aritmetici uključena konstrukcija, iako nešto drugačije vrste. Tu je ona temeljena na čistom zoru vremena, koji je temelj, u našem slučaju, za sukcesivno dodavanje jedinica pri zbrajanju.

James Robert Brown vrlo elegantno rezimira Kantovu filozofiju matematike: "Jedna je od središnjih Kantovih doktrina ta da ne doživljavamo stvari kao da su one neovisne o nama, već radije da um nudi mnogo od okvira iskustva. Prostor, vrijeme i kauzalne relacije su, primjerice, pružene od nas. One nisu dio jedne neovisne, objektivne realnosti – nešto što Kant i njegovi sljedbenici smatraju krajnje nemogućim. Doživljavamo objekte kao one koji imaju položaj u prostoru i događaje kao one koji se događaju u vremenu, ali to je zato što su prostor i vrijeme umski doprinos iskustvu – oni su *forme* iskustva. Kantov je pogled o matematici baziran na tome. Naše apriorno znanje o geometrijskim istinama potječe iz činjenice da je prostor naša vlastita tvorevina. A aritmetika je, po Kantu, povezana s našom percepcijom vremena. Ključni je element percepcija sukcesije. I tako naše apriorno znanje o numeričkim istinama potječu iz činjenice da je vrijeme naša vlastita mentalna tvorevina."[34]

Zaključno možemo reći da za Kanta konstruktibilnost matematičkih pojmova u čistom zoru nudi objašnjenje njihove sintetičke naravi, ali i njihove apriornosti. Sintetičke stoga jer je sam čisti zor potreban da bismo uopće došli do matematičke spoznaje, što kod analitičkih sudova ne vrijedi. Na temelju jedne singularne reprezentacije (no ne objekta, već procesa konstrukcije, možemo reći simboličkog objekta) u čistom zoru stvaramo univerzalne zaključke, jer čisti zor predstavlja aprioran segment naše spoznaje, tj. on nam osigurava o iskustvu neovisnu, univerzalnu i objektivno vrijednu spoznaju. Kant je tako objasnio i samu aplikabilnost matematike jer ono što je predstavljeno u čistom zoru vrlo lako može biti primijenjeno i u empirijskome, budući da je ovaj prvi samo forma potonjega. Mogli bismo reći na taj način da je geometrija na neki način zapažanje figura u čistom zoru prostora i kao takva predstavlja disciplinu koja nam donosi eksplikaciju, tj. razjašnjenje i studiju naravi samog čistog zora prostora. Drugim riječima euklidska geometrija predstavlja tako način na koji jedino *možemo* opažati predmete u fizičkom svijetu. Isto vrijedi i za aritmetiku, samo po

[33] Shapiro, S., nav. dj., str. 86.

[34] Brown, James R., *Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, New York, 1999., str. 114–115.

pogledu vremena, tj. na nju možemo gledati kao disciplinu koja "opisuje svojstva percipirana zbira objekata"[35] (preciznije percepciju sukcesije dodavanja objekata kroz neko vrijeme).[36]

3. Neki problemi ovakva gledišta

Matematika u Kantovim očima ima jako važnu ulogu, što je dovoljno jasno imamo li na umu da se ona bavi studijom čistih zorova, koji su preduvjet svake spoznaje. Stoga su problemi koji tište njegovu filozofiju matematike opterećujući za njegov čitav filozofski projekt. Koliko je fascinantna ideja sintetičkog *a priori* suda, toliko je i upitna. Pitanje je je li Kant uspio "stegnuti vezu između apriorna čistog zora i svakodnevne osjetilne percepcije ili empirijskog zora."[37] Iako možda plauzibilnija izgleda njegova slika geometrije, osvrnut ćemo se na prigovore vezane za taj dio njegove filozofije matematike.

3.1. Svijet nam se pojavljuje u projektivnoj, a ne euklidskoj geometriji

Prema iznesenoj interpretaciji "euklidski postulati opisuju moguće linije koje možemo *vidjeti*. Međutim ako pogledamo na dugo protezanje dviju paralelnih crta kao što je par željezničkh tračnica, čini se da se susreću. Ako rotiramo krug, čini se eliptičnim. Ukratko euklidska geometrija ne opisuje uvijek kako se prostor *pojavljuje*. Percepcija je projektivna, ne euklidovska. Budući da Kant vezuje zor uz osjetilnu percepciju i time pojavu, mora razriješiti ovu dihotomiju pojava-realnost."[38] Mogući bi odgovor kantijanca bio da se može izvršiti intersubjektivna provjera, tj. da se "može nekako apstrahirati iz različitih perspektiva raznih promatrača, tražeći što im je svima zajedničko."[39]

3.2. Problem idealizacije

"Drugi je problem idealizacija, s kojim smo se ranije susreli i s kojim ćemo se opet susresti. Netko jednostavno ne može percipirati crtu bez širine. S nacrtanim figurama (shvaćenim putem 'empirijskog zora') dvije se ravne crte ili tangenta kružnice ne sreću u jednoj točki, već u malom području (određenoj tankošću crta, vidi figuru 3.2.). Pri rješavanju tog problema Kant ne može postupiti kao Platon i razdvajati svijet geometrije od fizičkog

---

[35] Shapiro, nav. dj., str. 88.
[36] Treba samo naznačiti da su u Kanta čisti zorovi *de facto* neodvojivi tako da kada rezoniramo unutar čistog zora prostora u geometriji, činimo to tijekom nekog vremena, a isto tako kada u aritmetici vršimo neko računanje, vršimo to predočujući jedinice u nekom prostoru. Usp. Shabel, L., *Kant's...*, str. 9.
[37] Shapiro, nav. dj., str. 87.
[38] Isto, str. 88.
[39] Na i. mj.

svijeta koji nastanjujemo i koji je siromašnije i nesavršeno oprimjerenje prvoga. To bi bio pad u racionalizam i narušio bi usku vezu s percepcijom."[40] Budući da Kant koristi Euklida govoreći o geometrijskim demonstracijama, nameće se pitanje u kakvu je odnosu nacrtana euklidovska figura, koja nije ništa manje dio prostora, sa svojim pandanom u čistom zoru prostora. Ukratko: kakva je uloga nacrtanih figura u takvoj demonstraciji? Jedan bi odgovor mogao biti da nacrtane crte samo pomažu matematičaru da se koncentrira na apriornu formu percepcije, tj. ona je metodološko pomagalo. Nacrtane figure i dijagrame nije, stoga, nužno nacrtati. Štoviše, mnoge su naše računske operacije izvršene čisto mentalno, "putem umskog oka", primjerice izračunavanje sume jednoznamenkastih brojeva.

3.3.Prihvaćanje ne-euklidovske geometrije

"Široko je prihvaćena teza da Kantova filozofija matematike zapinje na kasnijim postignućima u znanosti i matematici. Najčešće citiran primjer jest podizanje i prihvaćanje ne-euklidske geometrije i njena primjena na fiziku. Kant je postulat o paralelama smatrao apriornom nužnom istinom. Tako da ona ne može biti lažna, a sad je, u skladu sa suvremenom fizikom – empirijskom teorijom, prostor-vrijeme najbolje razumljeno kao ne-euklidsko. Učenjaci se ne slažu bi li Kant morao dopustiti ne-euklidskoj geometriji ikakav legitiman status."[41] To je najteži problem za kantijance u filozofiji matematike. Odgovor koji nude neki autori jest razlikovanje pojmovne i zorne mogućnosti, prema kojoj bi u prvu spadale ne-euklidske geometrije, dok bi u posljednju išla samo euklidska, jedina nužno istinita. "Propozicija je ili teorija pojmovno moguća ako analiza relevantnih pojmova ne otkrije kontradikciju. Kant dopušta mogućnost da su određene misli koje su u sukobu s euklidskom geometrijom koherentne, jer misli ne uključuju kontradikciju."[42]

Čak i da takav manevar pruža ne-euklidskoj geometriji legitiman status, pitanje je bi li kantijanac mogao, a morao bi, dopustiti pojmovno moguću ne-standardnu aritmetiku (nazovimo je ne-Peanova aritmetika). Pitanje je možemo li imati dvije ili više koherentnih matematika u kojoj je jedna (ili više njih) istinita.

Čak ako spomenuti manevar pruža nekakav legitiman status i ne-standardnoj matematici, ne zadovoljava svoju primjenu u fizici. "Kant je napisao da (euklidska) geometrija uživa 'objektivnu valjanost samo kroz empirijski zor, čija ... je forma čisti zor.' Da nije povezana sa zorom, geometrija ne bi imala 'objektivnu valjanost, već bi bila puka igra ...

[40] Na i. mj.
[41] Isto, str. 89.
[42] Na i. mj.

imaginacije ili razuma' (*Kritika čistoga uma*, B298). Budući da ne-euklidska geometrija po svoj prilici zaista narušava Kantovu vezu sa zorom, ona *jest* puka igra. Slijedi iz Kantova pogleda da znamo *a priori* da *ne-euklidska* geometrija ne može biti primjenjiva u fizici."[43] To se čini kao fatalan udarac geometriji, barem kantovskoj. Kantijanac je naime prisiljen povući svoju tezu o euklidskim postulatima kao sintetičkim *a priori* tvrdnjama. Čak i da kaže kako je važno za Kanta da je *geometrija* sintetička *a priori*, a u Kantovim je danima to bila euklidska, neobičnim se čini da se pogled o tome što je *a priori* mijenja ovisno o postignućima prirodne znanosti. Štoviše, "[č]injenica da se fizika ne ravna prema oštrim kritikama veoma je problematična, osim ako je kantovac spreman smjesta odbaciti postignuća u fizici. Je li koherentno modificirati nečije poglede o tome što je *a priori* kao odgovor na empirijsku znanost?"[44] U svakom slučaju, "[s]uvremeni kantovac ima težak posao."[45]

4. Zaključak

Kantova je filozofija matematike izrazito kompleksan i suptilan dio njegove filozofije te ovaj rad ne predstavlja ni jednu interpretaciju, već samo kratak segment jedne interpretacije. On je pokušaj davanja kratka pregleda važnih značajki njegove filozofije matematike.

Kao što smo vidjeli, Kantov pogled na matematiku izuzetno trpi pod kritikama koje su uslijedile postkantovskim razvojem fizike i matematike. Neke se od njih zaista čine fatalnima, no postoje interpretatori koji će zasigurno i dalje braniti takav stav te možda samo malo modificirati Kantove poglede. No najznačanije je što je Kant svojom idejom sintetičkog *a priori* suda potaknuo žive diskusije te utjecao na čitavo postakantovsko mišljenje. To je izrazito dobro vidljivo u daljnjoj filozofiji matematike, koju možemo sagledavati kao niz odgovora Kantu. Tako J. R. Brown primjećuje: "Zanimljivo je pogledati jaku vezu koju je Kant imao s većinom glavnih igrača u filozofiji matematike. Hilbert, formalist, bio je u potpunosti kantovac u vezi finitne aritmetike, kojoj je pridodao 'idealne elemente' kako bi obnovio čitavu klasičnu matematiku; Frege, logicist i platonist, odbacio je Kantov prikaz aritmetike, ali je u potpunosti prihvatio Kantov pogled na geometriju; Brouwer, konstruktivist, okrenuo je to prigrlivši Kantov pogled na aritmetiku, ali odbacivši njegov opis geometrije. Čak je i Russell karakterizirao neke od svojih pogleda s obzirom na Kanta. Ima

[43] Isto, str. 90.
[44] Na i. mj.
[45] Isto, str. 91.

jedan odlomak koji me uvijek šokira. U svojim ranim logicističkim danima (kada je isprva pristao uz tezu da je matematika isto što i logika) Russell kaže: 'Kant nije nikada sumnjao da su propozicije logike analitičke, dok je ispravno uočio da su one matematike sintetičke. Otada se čini da je logika isto toliko sintetička koliko i svi ostali vidovi istine' (Russell 1903: 457). Netko može, nagađam, rekonstruirati velik dio filozofije matematike jednostavno u terminima stavova i reakcija na Kanta."[46]

5. Bibliografija

Brown, James Robert, *Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, New York, 1999.,

Kant, Immanuel, *Kritika čistoga uma*, preveo Viktor D. Sonnenfeld, Nakladni zavod Matice Hrvatske, Zagreb, 1984.

Shabel, Lisa, *Apriority and Aplication. Philosophy of Mathematics in the Modern Period*, 2006 (12. travnja), str. 2–3.; http://people.cohums.ohio-state.edu/shabel1/cv.html

Shabel, Lisa, *Kant's Philosophy of Mathematics*, 2006 (12. travnja), str. 1.; http://people.cohums.ohio-state.edu/shabel1/cv.html

Shapiro, Stewart: *Thinking About Mathematics: The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, 2000.

[46] Brown, J. R., nav. dj., str. 115.