BLISKE OPREČNOSTI: KANT I MILL*

1. Reorijentacija

Naša priča počinje u osamnaestom stoljeću, s Immanuelom Kantom. Bilo je, naravno, značajne filozofske aktivnosti još u antici nakon Aristotela i u srednjem vijeku, ali ne mnogo one u središtu čijega je proučavanja bila matematika.[1]

Sedamnaesto je stoljeće doživjelo velike revolucije u znanosti i matematici, zahvaljujući osobama kao što su Rene Descartes, Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz. Kant je mogao filozofski odmjeriti nova znanstvena postignuća. Zahtjevi novostvorene fizike vodili su razvoju novih grana matematike i novim koncepcijama tradicionalnih grana. Važnije su inovacije uključivale nove metode analize, povezujući geometriju s algebrom i aritmetikom (Pierre Fermat i Descartes), te razvoj računa (Newton i Leibniz) za proučavanje gravitacije i gibanja. Newtonov je i Leibnizov račun uključivao pojmove neprekidnosti, derivacije i limesa, od kojih se nijedan nije glatko uklapao u prethodne matematičke paradigme. (Za lucidno tretiranje matematike i njene filozofije u sedamnaestom stoljeću vidi Mancosu, 1996.[2])

U to su vrijeme postojale dvije važnije filozofske škole. Na europskom su kontinentu *racionalisti* kao Descartes, Baruch Spinoza i Leibniz bili Platonovi prirodni baštinici. U postizanju su znanja naglašavali ulogu razuma kao suprotstavljena osjetilnom iskustvu. Ekstremne su verzije toga gledišta smatrale da *sve* znanje jest, ili bi idealno trebalo biti, bazirano na razumu. Racionalistički je model za prikupljanje znanja matematika – konkretno matematička demonstracija. Primjerice Spinozina *Etika*, razdijeljena na "poučke" i "demonstracije", ima jednaku strukturu kao Euklidovi *Elementi*. Velik je dio Descartesova filozofskoga rada pokušaj da dâ znanosti jednak stupanj sigurnosti kao što je to u matematici. Znanost bi trebala biti utemeljena na filozofskim prvim principima. Descartes je pokušao u matematičkom stilu izvesti zakone gibanja.

Empirizam, glavna opozicija racionalizmu, pokušaj je baziranja znanja, ili materijala od kojih je znanje sazdano, na iskustvu dobivenom iz pet osjetila. Značajniji su pisci ovoga razdoblja bili John Locke, George Berkeley, David Hume i Thomas Reid, koji su živjeli na Britanskom otočju. Uobičajena empiristička tema jest da *sve* što znamo o svijetu mora naposljetku doći od neutralna i nepristrana opažanja. Svemiru pristupamo jedino putem naših očiju, ušiju i tako dalje. Empiristi ponekad predstavljaju um kao praznu ploču na kojoj se ispisuju informacije dobivene putem osjetila. Mi smo pasivni promatrači koji ispituju nadolazeće informacije pokušavajući dati smisao svijetu oko nas.

Supstancijalna, podrobna prikaza matematike u tom razdoblju nema. Racionalisti su se, naravno, divili matematici, a Descartes i Leibniz i sami su bili veliki matematičari. Empiristi su nastojali ne isticati matematiku, možda zato što se nije lako uklapala u njihov kalup o prikupljanju znanja. Berkeley je ustrajno napadao pretpostavljenu rigoroznost

---

* Prevedeni je tekst prvi dio 4. poglavlja knjige Stewarta Shapira *Thinking About Mathematics: The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 2000., str. 73–91. Tekst je preveo Igor Eterović, lektorirala Ivana Sanković, a recenzirala dr. sc. Majda Trobok. Opaske su prevodioca navedene u uglatim zagradama.

[1] Nije neuobičajeno u slijedu događaja u povijesti filozofije skakati s Aristotela na takozvano "moderno doba", s Baconom, Hobbesom ili čak Descartesom. Predavanja u povijesti matematike često imaju sličan jaz, možda tek lagano popunjen, no pogrešan je zaključak da se jako malo od materije pojavljivalo tijekom tih dvaju tisućljeća. U ovoj su knjizi opravdanja za jaz ograničenje prostora i moja stručnost te činjenica da istražujemo neposredne preteče suvremenih pozicija u filozofiji matematike.

[2] [Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford University Press, Oxford, 1996.]

infinitezimalnog računa (vidi Jesseph, 1993[3]). No ako su empiristi namjeravali dati matematici ulogu u znanosti, morali su ponuditi i neki njezin prikaz.

Raštrkane filozofske opaske o matematici otkrivaju iznenađujuće mnogo podudarnih stavova dviju važnijih škola. Obje su strane, racionalisti i empiristi, smatrale da matematika govori o fizičkim veličinama ili protežnim objektima. Objekti se susreću empirijski. Dvije se škole razilaze u stavovima o umskom pristupu *idejama* protežnih objekata i o statusu rezoniranja o tim idejama. Primjerice Descartes je smatrao da imamo jasnu i razgovijetnu percepciju "čiste protežnosti" koja leži u temelju fizičkih objekata i da o toj čistoj protežnosti možemo neposredno razmišljati. Taj pogled svjedoči o racionalističkom uvjerenju da je ljudski intelekt moćan alat za rezoniranje – matematičko – do temeljnih apriornih zaključaka o fizičkome svijetu.

Empiristi smatraju da su matematičke ideje izvedene iz iskustva, možda slijedeći Aristotela. Naša ideja o broju šest, primjerice, dolazi iz našeg iskustva s grupom od šest objekata. Ideja "trokuta" dolazi od gledanja objekata trokutna oblika. Za empiriste nema supstancijalne "čiste protežnosti" koja leži u osnovi percipiranih objekata. Postoje samo percipirani objekti. Ono što vidiš, to dobiješ.

Usprkos tim i drugim razlikama tipični bi se empirist mogao složiti s tipičnim racionalistom da je, jednom kada je relevantna ideja dobivena, daljnje traganje za matematičkim znanjem neovisno o svakome sljedećem iskustvu. Matematičar razmatra kako se razne matematičke ideje međusobno odnose. Primjerice u svojoj je *Raspravi o ljudskoj prirodi* Hume aludirao na istine aritmetike i algebre kao na "odnose među idejama" i odvaja ih od "činjenica i postojanja" koje učimo empirijski. Geometrija je empirijska znanost, po svoj prilici zaokupljena generalizacijama iz iskustva. Desetljeće kasnije, u svom popularnom *Istraživanju o ljudskom razumu*, Hume je tvrdio da se aritmetika, algebra i geometrija sve jednako bave (samo) odnosima među idejama i kao takve nisu empirijske. Zajednički je temelj obiju škola taj da su, barem u nekom smislu, matematičke istine apriorne ili neovisne o iskustvu. Glavni je spor oko razmjera osjetilnog iskustva potrebnog za dobivanje ili zahvaćanje relevantne ideje i njezino razmatranje.

Čini se da se matematičkoj istini pripisuje izvjesna nužnost. Kako može 5 + 7 ne biti 12? Kako može teorem o faktorizaciji (na proste faktore) biti lažan? Racionalizam to lako rješava, približno putem platoničke linije. Nema kontingencije u mentalno zahvaćenim matematičkim idejama kao što je čista protežnost, koja leži u osnovi fizičkim objektima. Možemo, naravno, griješiti u našem zahvaćanju matematičkih ideja ili u pokušaju demonstracije, ali metodološki prikladno izvedena matematika dostavlja samo nužne istine. Naravno da ta perspektiva nije na raspolaganju empiristima te nemaju tako izravna objašnjenja o doimajućoj nužnosti matematike. Moguće je da su neki od njih držali da su temeljne matematičke propozicije istinite po definiciji, što će racionalist smatrati razočaravajućim jer ostavlja matematiku bez sadržaja. Hume primjećuje da ne možemo zamisliti ili koncipirati negacije tipičnih matematičkih teorema, ali se to čini kao slabo uporište za nužnost matematike. Je li samo kontingentno psihološko ograničenje to koje nas sprečava za poimanje stvari na ikoji drugi način?

Upotreba je nove matematike u znanosti donijela nove probleme primjenjivosti matematike na fizički svijet. Tu je empirizam dao bolja rješenja. U skladu s tom školom matematičke su ideje iščitane iz svojstava opaženih objekata i matematičari proučavaju odnose između tih ideja. Zbog toga su empiristi držali da matematičari indirektno razmatraju određene fizičke odnose između opaženih fizičkih objekata. To objašnjenje nije upotrebljivo racionalistu. Njegov je problem pokazati kako se urođeno priskrbljeni, unutarnji matematički entiteti odnose prema objektima koje percipiramo u svijetu oko nas i proučavamo u znanosti.

[3] [Jesseph, D., *Berkely's Philosophy of Mathematics*, University of Chicago Press, Chicago, 1993.]

Empirist tako slijedi Aristotela, otvorenim opisivanjem *poklapanja* između opaženih fizičkih objekata i njihovih matematičkih pandana, dok racionalist slijedi Platona, izravno opisujući *nepoklapanja* između objekata osjetila i njihovih matematičkih pandana, kao što su savršeni krugovi i trokut te možda veliki brojevi.

2. Kant

Sukob je između racionalizma i empirizma glavna motivacija Kantu za pokušaj sinteze koja zahvaća ono najplauzibilnije obiju strana. Rezultat je toga bio herojski pokušaj da se objasni ili zadovolji nužnost matematike i apriorna priroda matematičke istine dok se objašnjava ili zadovoljava mjesto matematike u empirijskoj znanosti i, konkretno, primjenjivost na opaženi fizički svijet. Kantov je problem bio kako pokazati apriornu spoznatljivost matematike i istovremenu univerzalnu primjenjivost – na čitavo iskustvo – s nepogrešivom sigurnošću. Njegovi pogledi na matematiku nisu sastavnica odvojiva od njegove cjelokupne filozofije. Naprotiv, primjedbe se o matematici pojavljuju u njegovu čitavu filozofskom pisanju. Upravo je zato važan ključ za razumijevanje Kanta razumijevanje njegovih pogleda na matematiku.

Čitatelj bi trebao primijetiti da je, iako nudi neke teme Kantove kompleksne i suptilne filozofije matematike, naredna skica jedva zagrebala površinu. Štoviše, postoji mnogo neslaganja između proučavatelja (za početak vidi stavke spomenute na kraju ovog poglavlja). Prihvaćena interpretacija koja je dolje ponuđena temeljena je djelomično na njihovu radu i trudio sam se koliko pribilježiti veća neslaganja toliko ih i izbjegavati. Kako god bilo, neizbježno je da će dijelovi svake interpretacije biti u raskoraku s nekim istaknutim učenjima.

Najintrigantnije je i najproblematičnije obilježje Kantove filozofije matematike njegova teza da su istine geometrije, aritmetike i algebre sintetičke apriorne istine utemeljene na "zoru". Ključni su pojmovi apriorno znanje, distinkcija analitičko–sintetičko i sposobnost zrenja.

Za Kanta je univerzalna propozicija (oblika "Svi *S* su *P*") *analitička* ako je pojam predikata (*P*) sadržan u pojmu subjekta (*S*); inače je propozicija *sintetička*. Primjerice "Svi neženje su neoženjeni" analitička je propozicija ako je pojam bivanja neoženjenim sadržan u pojmu neženje. "Svi ljudi su smrtni" analitička je propozicija ako je pojam smrtnosti sadržan u pojmu čovjeka. Budući da biti muško nije (po svoj prilici) dio pojma biti predsjednik, "Svi predsjednici su muškarci" sintetička je propozicija.

Kao što znamo nemaju svi sudovi formu subjekt – predikat, pa je tako u suvremenom svjetlu Kantova definicija *analitičnosti* neprirodna i neprikladna. On prepoznaje ostale forme suda navodeći da je primjena razlikovanja analitički ~ sintetički na negativne sudove izravna (*Kritika čistoga uma*, A6/B11), ali ne kaže mnogo više. Što je s hipotetičkim sudovima kao "Ako sada pada kiša, onda ili pada kiša ili pada snijeg"? To nije mjesto na kojem ćemo navesti poboljšanja ili proširenja Kantove distinkcije, ali trebamo ispitati njene temelje.

Metafizički status kantovske analitičke istine upućuje na prirodu *pojmova*. Ne trebamo dalje ulaziti u to, nego samo primijetiti da Kantova teza pretpostavlja da pojmovi imaju dijelove (barem metaforički), jer inače ne možemo govoriti o tome da jedan pojam "sadrži" drugi. Relevantna su pitanja tu epistemička. Kant je vjerovao da su dijelovi pojmova zahvaćeni kroz mentalni proces pojmovne analize. Naprimjer kada iznosimo propoziciju u formi "Svi *S* su *P*", analiziramo pojam subjekta *S* kako bismo vidjeli ako je predikat *P* među dijelovima. Dolazimo do spoznaje da su "svi neženje neoženjeni" analiziranjem pojma "neženja" i učenjem da on sadrži "neoženjen". Ukratko: koji god bio pojam, Kant je držao da je svatko tko zahvaća neki pojam može izvesti njegovu analizu i odrediti njegove komponente. Pojmovna analiza otkriva ono što je već implicitno u pojmovima: "[analitične sudove, nap. I. E.] bismo mogli nazvati sudovima objašnjavanja (...), jer oni (...) pomoću predikata ništa ne pridaju pojmu subjekta, nego ga razglabanjem samo rastavljaju na njegove diobene pojmove koji su se već pomišljali u njemu"[4] (*Kritika čistoga uma*, B11). Shodno tome pojmovna analiza ne donosi novo znanje o svijetu, u smislu da nam ne govori ništa ili ništa novo.

Jasno je da su analitičke istine spoznatljive *a priori*. Neka A bude analitička istina. Svatko tko zahvaća pojmove izražene u A može odrediti njihove dijelove i tako istinu o A. Nikakvo posebno iskustvo svijeta nije potrebno, osim onog potrebnog da se zahvate potrebni pojmovi.

Kant navodi da je malo matematičkih propozicija analitičko. Razmotrimo, primjerice, "Svaki trokuti ima tri kuta" ili možda "svaki trokut ima tri stranice"[5] ili "Svaki je trokut identičan samome sebi". Kant je držao da su gotovo sve matematičke propozicije sintetičke. Pojmovna analiza sama ne određuje da je $7 + 5 = 12$, ili da između bilo kojih dviju točaka može biti povučena ravna crta, ili da je ravna crta najkraći put između dvije točke. Pregled pojmova odgovarajućih "7", "5", "12", dodavanje, identitet, točka i crta neće nam otkriti istinu tih propozicija.

Da bismo vidjeli zašto je Kant mislio da pojmovna analiza nije dovoljna za uspostavu mnogih matematički propozicija, poslužit ćemo se Kantovom epistemologijom. On je držao da su sintetičke propozicije spoznatljive samo putem "zora", tako da se moramo okrenuti tom pojmu.

Kantovski zor ima dvije značajke, iako se proučavatelji ne slažu oko relativne važnosti svake od njih. Prvo, zorovi su singularni, u smislu da su oni modusi reprezentiranja individualnog objekta. Zaista, zor je esencijalan za spoznaju individualnog objekta. Nasuprot tome pojmovna analiza nije singularna te proizvodi samo generalne istine. Znamo iz pojmovne analize da su svi neženje neoženjeni, ali uz to ne učimo postoji li ikoji neženja niti se upoznajemo s kojim. U raspravi o ontološkom argumentu za Božje postojanje Kant tvrdi da ne možemo o postojanju čega naučiti samo pojmovnom analizom (*Kritika čistoga uma*, B622–3). Da prilagodimo tu tezu matematici, pretpostavimo da netko želi pokazati da postoji prost broj veći od 100. Po tipično matematičkom običaju on će pretpostaviti da je svaki prirodni broj iznad 100 složen i izvesti kontradikciju. Tako je on *možda* uspostavio analitičku istinu da nije slučaj da su svi brojevi iznad 100 složeni, ali mi jedino stječemo iskustvo tog prostog broja ako znamo da *postoje* prirodni brojevi veći od 100. Koliko god daleko pojmovna analiza došla, ipak se čini da još imamo mogućnost odbaciti egzistencijalnu pretpostavku.[6] Slično tome znamo samo da je dijagonala kvadrata nesumjerljiva s njegovom stranicom ako znamo da postoje kvadrati i da kvadrati imaju dijagonalu. Pojmovna analiza to ne uspostavlja. Po Kantu trebamo zor za reprezentaciju *broja* (ili brojčane grupe objekata) i geometrijskih figura te za učenje stvari o njima. *A fortiori* pojmovna analiza ne može dostaviti (potencijalnu) beskonačnost broja i prostora (vidi Friedman, 1985[7]).

---

[2] [Kant, I., *Kritika čistoga uma*, Nakladni zavod Matice hrvatske, Zagreb, 1984., str. 26. Svi su citati iz *Kritike čistoga uma* preuzeti iz ovog hrvatskog prijevoda.]

[5] Pojam izražen engleskom [i hrvatskom] riječju "trokut" sadrži pojam bivanja "trokutnim". Sadrži li također i pojam "trostran"? Njemačka je riječ za "trokut" "*Dreieck*", "trougao". Po svoj prilici taj pojam sadrži pojam "trokutan", no, ponovno, uključuje li pojam "trostran"?

[6] Budući da, koliko znam, Kant ne govori o demonstraciji u aritmetici, teško je ne dvojiti kod tog primjera. On dopušta da su neki zakoni u aritmetici analitički, ali možda trebamo zor da bismo odredili da nije svaki prost broj veći od 100 složen. Poanta je tu da bi Kant zasigurno držao da trebamo zor za uspostavljanje *postojanja* tvrdnje. U suvremenim logičkim sustavima "nije slučaj da svi x su P" povlači da "postoji x koji je ne-P". Simbolički, $\neg\forall xPx$ povlači $\exists x\neg Px$. Uključivanjem jednog barbarskog anakronizma, ako je prethodna interpretacija Kanta točna, on bi smatrao tu inferenciju onom koja uključuje zor, tj. inferencija u pitanju bi mogla voditi od analitičke istine prema sintetičkoj. Za jedan pronicav prikaz odgovarajuće logike kakva bi se pripisivala Kantu vidi Posy (1984).

[7] [Friedman, Michael, "Kant's Theory of Geometry", *Philosophical Review*, 94, 1985, 455–506; retiskano u: Posy, C., *Kant's Philosophy of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992., 177–219.]

Jedan je razlog za razmatranje matematike kao sintetičke taj što ima posla s individualnim objektima kao što su brojčane grupe stvari, geometrijske figure i čak prostor sam – koji Kant uzima kao singularan i shvaćen zrenjem. Međutim njegovi su nazori dublji od toga.

U slavnom (ili neslavnom) odlomku Kant tvrdi da su sume sintetičke:

> Isprva bi se doduše moglo misliti da je sud 7 + 5 = 12 samo analitički sud, koji proizlazi iz pojma sume od 7 i 5 prema načelu proturječja. No ako stvar pobliže razmotrimo, onda ćemo utvrditi da pojam sume od 7 i 5 ne sadržava ništa više nego sjedinjenje obih brojki u jednu jedinu, a time se još nikako ne pomišlja koji je to jedini broj koji obuhvaća oba. Pojam dvanaest nipošto nije pomišljen već time što ja sebi zamišljam samo ono sjedinjenje o sedam i pet. Ja svoj pojam o takvoj mogućoj sumi mogu raščlanjivati dokle god hoću, ipak u njemu neću naći dvanaest. Čovjek mora izaći iz tih pojmova, uzimajući u pomoć predodžbu koja jednome od dvaju od njih odgovara, recimo pet svojih prstiju ili (...) pet točaka, pa se tako jedinice u predodžbi danih pet postepeno dodaju pojmu sedam. (...) vidim kako na taj način nastaje broj 12. Da je 7 trebalo dodati broju 5, to sam doduše pomišljao u pojmu sume = 7 + 5, ali ne to da je ta suma jednaka broju 12. Aritmetički je sud dakle u svako doba sintetičan. Toga čovjek postaje to jasnije svjestan ako uzme veće brojke, jer onda postaje očigledno da samim raščlanjivanjem svojih pojmova nikada ne bismo mogli naći sumu ako ne uzmemo u pomoć predodžbu, kako god mi okretali i obrtali svoje pojmove.[8]

Prisjetimo se da u Kanta pojmovna analiza ne donosi novo znanje, već radije samo otkriva što je implicitno u pojmovima. Tu Kant ustvrđuje da dodavanje donosi novo znanje i kao takvo je sintetičko.

Kant je držao da su, iako većina njih jest sintetička, matematičke propozicije spoznatljive apriorno – neovisno o osjetilnom iskustvu. Kako je to moguće? Dolazi li motivacija iz matematike ili ne, velik dio Kantove opće filozofije posvećen je pokazivanju kako su moguće sintetičke *a priori* propozicije. Kako može biti apriornih istina koje nisu utemeljene na pojmovnoj analizi?

Druga je značajka kantovskog zora ta da donosi *neposredno* znanje. Kao što je pokazano odlomkom o 7 + 5, zor je usko vezan uz osjetilnu percepciju, barem za ljude. Tipičan bi zor bio zamjedba koja leži u temelju suda da moja desna ruka sadrži pet prstiju.

Naravno, ta je vrsta zrenja empirijska i znanje je koje proizvodi kontingentno. Mi ne učimo matematiku na takav način. Kant je držao da postoji forma zrenja koja donosi apriorno znanje nužnih istina. To "čisto" zrenje donosi *forme mogućeg empirijskog zrenja*. Tako je čisti zor svjesnost prostorno-vremenske forme uobičajene osjetilne percepcije. Ideja je da čisti zor otkriva preduvjete neproblematična empirijskog znanja prostorno-vremenskih objekata. Naprimjer euklidska se geometrija tiče načina na koji ljudi nužno percipiraju prostor i prostorne objekte. Zamjećujemo objekte u tri dimenzije, ravnim linijama omeđenim regijama i tako dalje. Aritmetika se tiče načina na koji ljudi moraju percipirati objekte u prostoru i vremenu, locirajući i razabirući objekte te brojeći ih. Aritmetika i geometrija tako opisuju okvir percepcije. Kao što iznosi Jaakko Hintikka (1967: §18)[9] za Kanta "postojanje individua uz koje je vezano matematičko rezoniranje duguje procesu pomoću kojeg dolazimo do spoznaje postojanja individua uopće". Kant je smatrao da je taj proces osjetilna percepcija. Tako "struktura matematičkog rezoniranja duguje strukturi našeg perceptivnog aparata".

Prisjetimo se da je za Descartesa "čista protežnost" percipirana direktno u fizičkom objektu (makar metaforički). Nasuprot tome Kant je pretpostavio da se čisti zor tiče forme moguće ljudske *percepcije*. Te forme nisu u samim fizičkim objektima, ali su oni na neki način dostavljeni od ljudskog uma. Mi strukturiramo našu spoznaju na određen način.

---

[8] [Kant, I., *Kritika čistoga uma*, str. 380–381.]

[9] [Hintikka, J., "Kant on the Mathematical Method", *Monist*, 51, 1967, 352–375; retiskano u: Posy, C., *Kant's Philosophy of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992., 21–42.]

Slijedi odlomak iz *Kritike čistoga uma* koji osvjetljava prirodu geometrijskih apriornih zorova i nužnosti matematike. Očito je da Kant smatra filozofiju aktivnošću pojmovne analize i kontrastira je s matematikom:

> Matematika daje najsjajniji primjer čistoga uma koji se sam od sebe sretno proširuje bez pomoći iskustva. [...] *Filozofijska* spoznaja jest *umska* spoznaja iz *pojmova*, matematička iz *konstrukcije* pojmova. *Konstruirati* pak pojam reći će: zor, koji mu odgovara, prikazati a priori. Za konstrukciju pojma zahtijeva se dakle *neempirijski* zor, koji je prema tome kao zor *pojedinačan* objekt, ali zato on kao konstrukcija pojma (neke opće predodžbe) isto tako mora izražavati opću vrijednost za sve moguće zorove koji pripadaju pod isti pojam. Tako ja konstruiram trokut, budući da predmet koji odgovara tome pojmu prikazujem pomoću same uobrazilje u čistome zoru ili prema toj uobrazilji i na papiru u empirijskome zoru, ali u oba slučaja potpuno a priori, ne uzimajući uzorak za nj iz nekog iskustva. Pojedina nacrtana figura jest empirijska, a unatoč tome služi da izrazi pojam bez štete po njegovu općenitost, jer se kod ovog empirijskoga zora uvijek gleda samo na radnju konstrukcije pojma za koji su mnoga određenja sasvim sporedna, npr. određene veličine stranice i kutova, pa se dakle apstrahira od tih različitosti koje pojam trokuta ne mijenjaju. Filozofijska spoznaja razmatra dakle ono posebno samo u općenitome, matematička ono općenito u posebnome, štoviše, čak u pojedinačnome, ali ipak a priori i pomoću uma.[10] (B741–2)

Tako nailazimo na ponavljajuću temu povijesti filozofije matematike – apstrakciju (vidi poglavlje 3, §4).

Netko bi mogao misliti o Kantovu čistom zoru i procesu apstrakcije kao o izlaganju tipična ili paradigmatskog primjera danog pojma. Ponajprije u *pojmu* trokuta zor nas opskrbljuje (*a priori*) s tipičnim trokutom. Slično, počinjući od pojma broja, zor producira tipičan broj. Nakon toga matematičar radi sa zrenim primjerima. Međutim, kao što se upućuje prema kraju odlomka, to vjerojatno nije ono što je Kant imao na umu. Može postojati tipična točka ili crta, ali jednostavno nema tipična ili paradigmatskog trokuta. Svaki dani trokut, zamišljen ili na papiru, mora biti ili šiljasti, ili pravi, ili tupi te ili raznostraničan, ili jednakokračan, ili jednakostraničan pa tako bilo koji trokut ne može predstavljati sve trokute. Štoviše, kao što je Gottlob Frege (1884: §13)[11] kasnije istaknuo, ta gruba apstrakcija nema ni minimalnih izgleda primjene na aritmetiku. Svaki prirodni broj ima svojstva jedinstvena njemu i samo njemu pa tako ni jedan prirodni broj ne može predstavljati sve prirodne brojeve.

Kantova opaska da "se kod empirijskog zora uvijek gleda samo na radnju konstrukcije pojma" upućuje na uobičajenu tehniku u deduktivnom rezoniranju. Pretpostavimo da je geometar uključen u geometrijsku demonstraciju o jednakokračnim trokutima. Nacrta jedan takav trokut i razmišlja o njemu. Nadalje naš geometar priziva samo svojstva svih jednakokračnih trokuta i ne koristi se ni jednom drugom značajkom nacrtanog trokuta, kao što je točna veličina kutova ili je li baza kraća ili duža od ostalih stranica. Ako je uspješan, zaključci se mogu primijeniti na sve jednakokračne trokute. Takva je tehnika uobičajena u matematici. Teoretičar brojeva može započeti tvrdnjom "neka je n prost broj" i razmišljati dalje o "primjerku" n, koristeći samo svojstva koja imaju svi prosti brojevi. Ako pokaže da n ima svojstvo P, teoretičar zaključuje da svi prosti brojevi imaju svojstva P, a može i podsjetiti čitatelja da je n "proizvoljan".

Ta praksa odgovara pravilu zaključivanja u suvremenim logičkim sustavima, ponekad zvanom "generalizacija" ili "univerzalna introdukcija". U sustavima je prirodne dedukcije pravilo da se iz formule oblika $\Phi(c)$ (tj. predikat Φ stoji za individuu c) može izvesti $\forall x\Phi(x)$ (tj. Φ stoji za sve), pod uvjetom da se konstanta c ne pojavljuje u formuli $\forall x\Phi(x)$ ili u bilo kojoj premisi na kojoj počiva $\Phi(c)$. Ograničenja u upotrebi pravila garantiraju da je singularni

[10] [Kant, I., *Kritika čistoga uma*, str. 319–320.]

[11] [Frege, G., *Die Grundlagen der Arithmetik*, Koebner, Breslau, 1884; usp. hrvatski prijevod: *Osnove aritmetike i drugi spisi*, Kruzak, Zagreb, 1995.]

term *c* zaista proizvoljan. Može biti bilo koji broj. No to je pravilo zaključivanja bilo izvan dosega logike za koju je Kant znao. Kant je notorno tvrdio da logika nema potrebe otići mnogo dalje od Aristotelovih silogizama. U interpretiranju Kanta Hintikka (1967)[12] uzima "inferencije" kao što je pravilo generalizacije za esencijalnu komponentu matematičkog zrenja. Tako svaka demonstracija koja čini esencijalnom upotrebu tog pravila ima sintetičku konkluziju – čak i ako su njene premise analitičke. U suvremenim okvirima pravilo generalizacije priziva singularni term, "proizvoljnu" konstantu uvedenu u tekst. To tijesno pristaje uz kantovsko zrenje koje ima posla s individualnim objektima. Prema toj bi interpretaciji Kant, da je učio suvremenu logiku, ili povukao svoju glavnu tezu da je matematika sintetička ili, vjerojatnije, tvrdio da u svjetlu (naše) logike valjani zaključak može imati analitičke premise i sintetičku konkluziju, upravo zato što jedno od naših pravila inferencije priziva singularni term (vidi također bilješku 3).

Naravno, Kant je usko vezao zrenje uz osjetilnu percepciju ili, u slučaju čistog zrenja, uz forme osjetilne percepcije, a pravilo generalizacije nije posebno povezano ni s jednim od njih, već je potpuno općenito. Hintikka ne ističe Kantovu tezu da su zorovi neposredni i da su vezani uz percepciju ili njenu formu. Predbacuje Kantu preuzak pogled na djelokrug "zrenja". Većina komentatora ne slijedi Hintikku u takvu stavu i pokušava razgraničiti otvoreniju ulogu neposrednosti od formi percepcije u Kantovoj filozofiji matematike (vidi npr. Parsons, 1969 i Postscript u reizdanju Parsons, 1983: Esej 5[13]). Većina učenjaka smatra da Kant drži da su *aksiomi* geometrije sintetički te je tako status logike nebitan.

Razmotrimo još jedan odlomak u kojemu Kant širi razliku između matematike i pojmovne analize u "filozofiji":[14]

> Filozofija se drži samo općih pojmova, ali matematika samim pojmom ne može ništa napraviti, nego se odmah žuri k zoru u kojem razmatra pojam in concreto, ali ipak ne empirijski, nego samo u takvome zoru koji je a priori prikazala, tj. konstruirala i u kojemu ono što slijedi iz općih uvjeta konstrukcije mora općenito vrijediti o objektu konstruiranoga pojma. Neka se filozofu dade pojam trokuta i neka on na svoj način pronađe kako se suma njegovih kutova odnosi prema pravome kutu. On dakle ima samo pojam o liku koji je omeđen s tri pravca, a u tome liku pojma o isto toliko kutova. On sada može razmišljati o tome pojmu dokle god hoće, pa neće izaći ništa novo. On može raščlanjivati i napraviti jasnim pojam pravca ili kuta ili broja tri, ali na druga svojstva, koja ne leže u tome pojmu, neće doći. Neka naprotiv geometar uzme pred sebe to pitanje. On odmah počinje time da konstruira trokut. Budući da zna da dva prava kuta iznose zajedno upravo toliko koliko iznose svi usporedni kutovi koji se iz jedne točke mogu provući na pravcu, on produžuje jednu stranicu svoga trokuta i dobiva dva usporedna kuta koji su jednaki dvama pravima. Na to on dijeli vanjski od ovih kutova, povlačeći liniju paralelno sa stranicom trokuta koja stoji nasuprot, pa vidi da tu nastaje vanjski usporedni kut koji je jednak jednom unutrašnjem itd. Na taj način on putem lanca zaključaka, vođen uvijek zorom, dolazi do potpuno jasnog i ujedno općenitog rješenja pitanja.[15] (B743–5)

Tu Kant referira na standardni euklidski dokaz da je suma kutova u trokutu jednaka dvama pravim kutovima (180°), koju nalazimo u Knjizi 1, Poučak 32 Euklidovih *Elemenata*. Kantova je perspektiva sugestivna. Kao što je ranije primijećeno, pojmovna analiza ne producira novo znanje, već samo razotkriva ono implicitno u pojmu – samo "razdjeljuje" ili "čini jasnim" dijelove koji su već ondje. Nasuprot tome matematika producira novo znanje. Njene konkluzije nisu implicitne u pojmovima. Zor nas opskrbljuje s primjerima objekata ili grupama objekata koji prikazuju pojam o kojem je riječ. Drugim riječima zrenje producira geometrijske figure ili brojčane zbirove objekata. Međutim to je jedva dovoljan početak.

---

[12] [Hintikka, J., nav. dj.]
[13] [Parsons, C., *Mathematics in Philosophy*, Cornell University Press, Ithaca, New York, 1983.]
[14] O pojmu trokuta vidi bilješku 2.
[15] [Kant, I., *Kritika čistoga uma*, str. 320–321.]

Samo s primjerima matematičar ne bi mogao otići mnogo dalje nego što je to dostupno pojmovnom analizom. Zasad je sve što zna o primjerima to da imaju dani pojam koji je u pitanju te tako svaki drugi pojam sadržan u njima. Matematika otkriva novo znanje kroz aprioran mentalni proces *konstrukcije*. Matematičar nastavlja i djeluje na dani primjer, slijedeći pravila implicitna u "čistom zoru".

Hintikka (1967[16]: §8) ističe da za Kanta paradigmu predstavljaju Euklidovi *Elementi*, stoga vrijedi kratko pogledati strukturu tipična euklidskog dokaza. On počinje "izjavom" generalne propozicije, koja navodi ono što treba ustvrditi. Propozicija 32 Knjige 1 glasi (dijelom): "U svakom su trokutu ... tri unutrašnja kuta ... jednaka dvama pravima". Tada Euklid pretpostavlja da konkretna figura koja zadovoljava hipotezu poučka mora biti nacrtana. To se naziva "izlaganje" ili *ecthesis*. Za Kanta to izlaganje uključuje zrenje, kako je gore rečeno. Zrenje nudi instance prikazujući dani pojam. (Vidi lijevi dio figure 4.1.). Ključan je treći dio dokaza gdje dovršavamo figuru crtanjem određenih *dodatnih* crta, kružnica, točaka i tako dalje. U primjeru ispod to može biti produljenje segmenta linije AB na AD i segmenta BE paralelna s AC. (Vidi desnu polovicu figure 4.1.).[17]

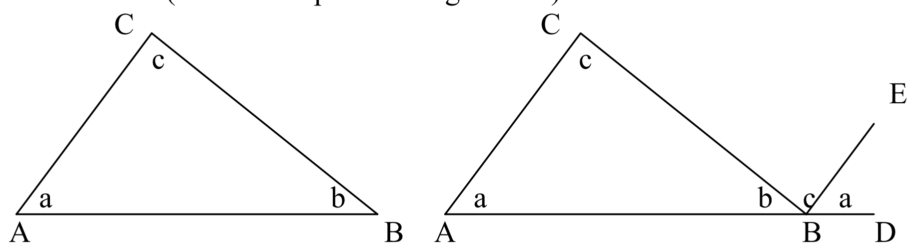

Figura 4.1. Dokaz da je suma kutova u trokutu jednaka dvama pravim kutovima.

Možda su te pomoćne konstrukcije bit čistog zrenja uključena u matematiku. Geometar (u ovom slučaju Euklid) producira stvari koje nisu bile tamo prije. Tada Euklid nastavlja s *dokazom* ili *apodeixis*, koji se sastoji od serije inferencija koje se tiču dovršene figure. U primjeru primjećujemo da je kut $\angle CAB$ jednak kutu $\angle EBD$ (po prethodnom teoremu) i da je kut $\angle ACB$ jednak kutu $\angle CBE$. Tako tri kuta trokuta ukupno iznose dva prava kuta.

U citiranom je odlomku Kant rekao da su inferencije "uvijek vođene zorom". Zor je uključen u *čitanje* dijagrama i to otkriva činjenice o originalnom trokutu. Naposljetku "dokazni" dio demonstracije donosi sintetičko znanje.[18]

Razmotrimo dalje što kaže Kant o izrazu 7 + 5 = 12. Ponovno valja naglasiti da pojmovna analiza ne donosi sumu, budući da nam ništa u pojmu 7 i 5 ne daje broj 12. Da bismo dobili sumu, "uzimamo u pomoć predodžbu koja jednome od njih dvaju odgovara, recimo pet svojih prstiju ili ... točaka". To odgovara izlaganju u euklidovskoj demonstraciji. Trebamo primjer kolekcije od pet objekata. Međutim to nije dovoljno jer još nemamo sumu. Stoga "jedinice u predodžbi danih pet postupno dodajemo pojmu sedam". Taj ključan korak, gdje nastavljamo "dodavati" jedinicu, odgovara pomoćnoj konstrukciji. Matematičar tako producira brojeve 8, 9, 10, 11 i naposljetku vidi kako na taj način "nastaje broj 12". On tako

[16] [Hintikka, J., nav. dj.]
[17] Poučak 32 glasi: "U svakom trokutu, ako se jedna od stranica produži, vanjski je kut jednak dvama unutarnjim nesusjednim kutovima, a tri unutarnja kuta trokuta jednaka su dvama pravim kutovima." [Euklid, *Elementi* 1–6, prevela Maja Hudoletnjak Grgić, Kruzak, Zagreb, 1999., str. 37.] Tako bi početak bio trokut ABC zajedno s linijskim segmentom BD. Pomoćna konstrukcija jest linijski segment BE paralelan s AC.
[18] Rečeno se odnosi na jedan od takozvanih logičkih "jazova" u Euklidovim *Elementima*. Pretpostavimo da imamo liniju koja ide od unutrašnjosti kružnice prema vanjštini. Euklid pretpostavlja da postoji točka gdje linija presijeca kružnicu. U svjetlu modernih spoznaja to ne slijedi iz postulatâ, aksiomâ i definicija. Mora se dodati princip neprekidnosti. No ako mislimo o Euklidovoj inferenciji kao "vođenoj zorom", tada možda ne postoji jaz. S takva je stajališta kontinuitet kružnice i linije zoran, a ne logički ili analitički.

konstruira nešto što nije implicitno sadržano u originalnom pojmu sume 7 i 5 kao ni u primjerima kojima nas je opskrbio zor. Charles Parsons (1969)[19] ističe da kada god "Kant govori o toj temi, tvrdi da broj, a time aritmetika, uključuje *sukcesiju* na ključan način". Tu vidimo kako se aritmetika nosi s potencijalnom beskonačnosti. Mi zremo da možemo uvijek nastaviti brojati.

Nedvojbeno je da postoji važna razlika između naših geometrijskih i aritmetičkih primjera. Kod jednostavne sume nema ničega što bi odgovaralo "dokaznoj" razini u euklidovskoj demonstraciji. Jednom kada je "pomoćna konstrukcija" završena, imamo sumu i gotovi smo. Kant navodi da aritmetika nema aksiomâ (npr. *Kritika čistoga uma*, B204–206), što bi moglo značiti da je smatrao da nema aritmetičkih demonstracija.[20] Usprkos tome sličnosti su između aritmetike i geometrije upadljive. U obama je slučajevima konstrukcija esencijalna matematičkom progresu.

Pratimo li smjernice te interpretacije ili rekonstrukcije Kantova prikaza matematike, moramo se koncentrirati na prirodu matematičke konstrukcije. Ideja je da nam čisti zor omogućava otkriti (*a priori*) mogućnosti za aktivnosti konstruiranja. Euklidski postulati omeđuju moguće konstrukcije u prostoru. Naprimjer svaki dio crte može biti beskonačno produljen ili, Euklidovim riječima, geometar može "producirati konačnu ravnu crtu kontinuirano na ravnoj crti" (Postulat 2). U aritmetici je odgovarajući princip taj da svaki broj može biti proširen do sljedećeg broja. To je korišteno u raspravi o 7 + 5 = 12. U takvoj nam interepretaciji postulati govore što matematičar može *činiti*.[21] To čini matematiku primarno mentalnom aktivnošću, a njen je predmet bavljenja moguća ljudska mentalna aktivnost (vidi Parsons, 1984[22]). Susrest ćemo se opet s idejom matematičke konstrukcije u nekim verzijama intuicionizma – možda Kantu najbližom filozofijom matematike u dvadesetom stoljeću (vidi poglavlje 7).

Moramo stegnuti vezu između apriorna čistog zora i svakodnevne osjetilne percepcije ili empirijskog zora. Kao što je rečeno gore, čisti zor omeđuje forme percepcije. Jedna je interpretacija ta da matematička konstrukcija otkriva *mogućnosti* percepcije u prostoru i vremenu. Aritmetika, primjerice, opisuje svojstva percipirana zbira objekata. Iz te je perspektive geometrija problematičnija. Po interpretaciji o kojoj je riječ euklidski postulati opisuju moguće linije koje možemo *vidjeti*. Međutim ako pogledamo na dugo protezanje dviju paralelnih crta kao što je par željezničkh tračnica, čini se da se susreću. Ako rotiramo krug, čini se eliptičnim. Ukratko euklidska geometrija ne opisuje uvijek kako se prostor *pojavljuje*. Percepcija je projektivna, ne euklidovska. Budući da Kant vezuje zor uz osjetilnu percepciju i time pojavu, mora razriješiti ovu dihotomiju pojava ~ realnost. Po svoj prilici kantovac može nekako apstrahirati iz različitih perspektiva raznih promatrača, tražeći što im je svima zajedničko. Drugi je problem idealizacija, s kojim smo se ranije susreli i s kojim ćemo se opet susresti. Netko jednostavno ne može percipirati crtu bez širine. S nacrtanim figurama (shvaćenim putem "empirijskog zora") dvije se ravne crte ili tangenta kružnice ne sreću u

---

[19] [Parsons, C., "Kant's Philosophy of Arithmetic", u: Morgenbesser, S. – Suppes, P. – White, M. (ur.), *Philosophy, Science, and Method: Essays in Honor of Ernest Nagel*, St Martin's Press, New York, 1969, 568–594; retiskano s dodanim Postskriptom u: Parsons, C., *Mathematics and Philosophy*, Esej 5, Cornell University Press, Ithaca, New York, 1983.; i u: Posy, C., *Kant's Philosophy of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992., 43–79.]

[20] Aritmetički su teoremi u Knjizi 10 Euklidovih *Elemenata* eksplicitno interpretirani u geometrijskim terminima. Neki komentatori doista pripisuju Kantu aksiomatsku utemeljenost aritmetike. Kad već govorimo o tome, zaista ne znam što bi Kant učinio s razlikom, kao 12 – 5 = 7. Netko bi mogao misliti da tu pomoćna konstrukcija nije potrebna. Jednom kada zahvaćamo pojam dvanaest objekata, možemo ga "razdjeljivati" da bismo odredili razliku. S druge strane možda sam čin odjeljivanja zbira jest konstrukcija koja uključuje zrenje.

[21] No Euklidov je četvrti postulat "da su svi pravi kutovi jednaki", što ne predstavlja konstrukciju.

[22] [Parsons, C., "Arithmetic and the Categories", *Topoi*, 3, 1984, 109-121; retiskano u: Posy, C., *Kant's Philosophy of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992., 135-158.]

jednoj točki, već u malom području (određenoj tankošću crta, vidi figuru 3.2.). Pri rješavanju tog problema Kant ne može postupiti kao Platon i razdvajati svijet geometrije od fizičkog svijeta, koji nastanjujemo i koji je siromašnije i nesavršeno oprimjerenje prvoga. To bi bio pad u racionalizam i narušio bi usku vezu s percepcijom.

Kant pretpostavlja da geometrija opisuje prostor pa su tako euklidovske figure dio prostora. Iako ne možemo vidjeti euklidovsku crtu jer je pretanka, ona je ipak dio prostora. Percipirani objekti postoje u prostoru i razumijemo percepciju jedino u onom razmjeru u kojem razumijemo prostor. Geometrija proučava forme percepcije u smislu da opisuje beskonačni prostor koji uvjetuje percipirane objekte. Taj je euklidovski prostor pozadina za percepciju i tako nudi forme percepcije ili, kantovskim rječnikom, apriornu formu empirijskog zrenja. O apriornom prostoru učimo izvođenjem konstrukcija u čistom zoru i dokazivanjem stvari o rezultatima.

Kakav je odnos između geometrijskih figura i njihovih nacrtanih pandana? Nitko ne može zanijekati da nacrtane crte samo približno određuju euklidovske crte. Međutim Kant, prateći Euklida, govori o nacrtanim figurama i "empirijskom zoru" kao dijelu geometrijskih demonstracija. Koja je tada uloga nacrtanih figura u euklidovskoj demonstraciji? Jedna je moguća interpretacija da nacrtane crte (i zahvaćene putem empirijskog zora) pomažu matematičaru u koncentriranju na odgovarajuće euklidovske crte. Konstrukcije na nacrtanim figurama odgovaraju mentalno shvaćenim konstrukcijama u euklidskom prostoru. Kant sigurno nije mislio da je nužno zaista nacrtati figuru na papiru kako bismo shvatili euklidsku demonstraciju. Uz nešto vježbe direktno se slijedi tekst demonstracije – putem umskog oka – bez konzultiranja dijagrama. Slično tome Kant sigurno nije držao da moramo *gledati na* grupu od pet objekata (kao što su "naših pet prstiju ili ... pet točaka") kako bismo izračunali 7 + 5. Možemo računati mentalno. Sve u svemu nacrtane figure ili dijagrami – u empirijskom zoru – pomažu umu u koncentriranju na apriorne forme percepcije.

Široko je prihvaćena teza da Kantova filozofija matematike zapinje na kasnijim postignućima u znanosti i matematici. Najčešće citiran primjer jest podizanje i prihvaćanje ne-euklidske geometrije i njena primjena na fiziku. Kant je postulat o paralelama smatrao apriornom nužnom istinom. Tako da ona ne može biti lažna, a sad je, u skladu sa suvremenom fizikom – empirijskom teorijom, prostor-vrijeme najbolje razumljeno kao ne-euklidsko. Proučavatelji se ne slažu bi li Kant morao dopustiti ne-euklidskoj geometriji ikakav legitiman status. Neki tvrde da je predvidio jedan način nužnosti i time ne bi morao učiniti distinkciju između čiste i primijenjene geometrije. Ako su ti učenjaci u pravu, tada je za Kanta ne-euklidska geometrija nepokretna. Drugi pripisuju Kantu distinkciju između pojmovne mogućnosti i onoga što bi moglo biti nazvano "zorna" mogućnost. Propozicija je ili teorija pojmovno moguća ako analiza relevantnih pojmova ne otkrije kontradikciju. Kant dopušta mogućnost da su određene misli koje su u sukobu s euklidskom geometrijom koherentne, jer misli ne uključuju kontradikciju. Spominje plosnatu figuru omeđenu dvjema ravnim crtama. Budući da je euklidska geometrija sintetička, ne-euklidska je geometrija pojmovno moguća.[23] Naravno, ne-euklidska nije *zorno* moguća jer je euklidska geometrija nužno istinita.

U takvoj bi interpretaciji ne-euklidske geometrije kantovac morao dopustiti pojmovno moguću ne-standardnu *aritmetiku*, koju bi mogli nazvati "ne-Peanova aritmetika". Za Kanta je 7 + 5 = 12 sintetičko pa su tako i 7 + 5 = 10 i 7 + 5 = 13 pojmovno mogući. No možemo li imati koherentne "čiste" matematike u kojoj je jedna istinita (ili su čak obje)?

Čak i ako spomenuti manevar pruža ne-euklidskoj geometriji neki legitiman status, možda u čistoj matematici, ipak ne zadovoljava svoju primjenu u fizici. Kant je napisao da (euklidska) geometrija uživa "objektivnu valjanost samo kroz empirijski zor, čija ... je forma

[23] Neki interpretatori vjeruju da je Kant smatrao da se ne mogu izraziti pojmovi geometrije bez pozivanja na konstrukciju u zoru – i ta je konstrukcija euklidska. Tako ipak ne-euklidska geometrija pretpostavlja nužnost euklidske geometrije.

čisti zor." Da nije povezana sa zorom, geometrija ne bi imala "objektivnu valjanost, već bi bila puka igra ... imaginacije ili razuma" (*Kritika čistoga uma*, B298). Budući da ne-euklidska geometrija po svoj prilici zaista narušava Kantovu vezu sa zorom, ona *jest* puka igra. Slijedi iz Kantova pogleda da znamo *a priori* da *ne-euklidska* geometrija ne može biti primjenjiva u fizici.

Bolji bi odgovor za kantovca možda bila teza da je postulat o paralelama sintetički *a priori*. Taj je poseban status dodijeljen samo onim propozicijama koje su uobičajene za euklidsku geometriju i nekima ne-euklidske geometrije (tj. svim euklidovim postulatima osim petog). Dio Kantove filozofije o *euklidskoj* geometriji kao sintetičkoj *a priori* možda nije duboko ukorijenjen. Ono što je važno jest to da je *geometrija* sintetička *a priori*, a u Kantovim je danima geometrija bila euklidska. Da bi izbjegao dvostruku sramotu, naš kantovac mora pomno paziti na buduća postignuća u fizici koja negiraju neki od ostalih postulata ili aksioma. No neobično je da bi kantovac mogao promijeniti svoj pogled o tome što je spoznatljivo *a priori* kao odgovor na postignuća u empirijskom pothvatu kao što je fizika. Kao što smo vidjeli u poglavlju 1, §3, naturalist bi trebao očekivati modifikaciju svojih filozofskih pogleda u svjetlu novih postignuća u znanosti i matematici. Filozofija je holistički pothvat. Međutim Kant nije bio naturalist. On je prilagodio kalup škole koju ja nazivam "filozofija-najprije" u poglavlju 1, §2. Kant je odlučio dati ograničavajuće apriorne pretpostavke iskustva i empirijske znanosti. Činjenica da se fizika ne ravna prema oštrim kritikama veoma je problematična, osim ako je kantovac spreman smjesta odbaciti postignuća u fizici. Je li koherentno modificirati nečije poglede o tome što je *a priori* kao odgovor na empirijsku znanost?

Ostala su se postignuća u matematici također pokazala problematičnima za kantovce. Naprimjer čini se da važne distinkcije između neprekidnosti i diferencijabilnosti te između uniformne neprekidnosti i neprekidnosti po točkama nemaju temelja u zoru. Kako se te distinkcije odnose spram forme percepcije? Ostale grane čiste i primijenjene matematike idu dalje u narušavanju veze sa zorom. Kako možemo postaviti u odnos kompleksnu analizu, više-dimenzionalnu geometriju, funkcionalnu analizu i teoriju skupova s formama percepcije? Mnoge su od tih grana matematike pronašle svoju primjenu u znanosti. Istina, mnoge su razvijene kao odgovor na potrebe znanosti. Naravno, za to ne možemo kriviti Kanta jer je većina postignuća o kojima je riječ došla nakon njegova životnog vijeka, ali smatrao je da njegove teze predstavljaju granicu za svu buduću znanost. Suvremeni kantovac ima težak posao.